Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2017/18

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 3

Abgabe am 13.11.2017

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

3.1 Auf $\mathbb{Z}$ sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ folgendermaßen definiert:

$$a \sim b \;:\Leftrightarrow\; 4 \,|\, (b-a)$$

Die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ nennt man Restklassen und bezeichnet sie mit $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ und $\overline{3}$.

Auf der Menge $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} := \left\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3}\right\}$ der Restklassen sei eine Operation $\oplus$ folgendermaßen definiert:

$$\overline{a} \oplus \overline{b} := \overline{a+b}$$

(a) Beschreiben Sie die Restklassen verbal. (Welche Eigenschaft haben die Elemente von $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ und $\overline{3}$ jeweils gemeinsam? Denken Sie an die Division mit Rest.) 1 Pkt.

(b) Beweisen Sie, dass die Operation $\oplus$ wohldefiniert (repräsentantenunabhängig) ist, also für beliebige a, a', b, b' mit $a \sim a'$ und $b \sim b'$ gilt: $\overline{a+b} = \overline{a'+b'}$. 2 Pkt.

(c) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\,, \oplus)$ eine Gruppe ist. 3 Pkt.

(d) Geben Sie die Gruppentafel (Verknüpfungstabelle) der Gruppe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\,, \oplus)$ an. 2 Pkt.

3.2 (a) Zeigen Sie, dass für beliebige Gruppen $(G, \circ)$ und beliebige $a, b \in G$ gilt:
$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ (die Reihenfolge ist absichtlich so gewählt). 3 Pkt.

(b) Beweisen Sie mithilfe der Kürzungsregeln (in den Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$):
Jede lineare Gleichung der Form $a \cdot x + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ über dem Grundbereich $\mathbb{R}$ besitzt genau eine Lösung. 3 Pkt.

3.3 Welche der folgenden Behauptungen sind in jeder Gruppe $(G, \circ)$ mit neutralem Element e richtig? Beweisen Sie die Aussagen oder geben Sie Gegenbeispiele an. 6 Pkt.
Für alle a, $b \in$ G gilt:

(a) $a \circ a = a \circ b \implies a = b$

(b) $a \circ a = b \circ b \implies a = b$

(c) $a^5 = a \implies a^4 = e$

(d) $a^5 = e$ und $a^4 = e \implies a = e$.

Freiwillige Aufgaben zur Wiederholung von Schulwissen

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen helfen, Ihr mathematisches Schulwissen zu überprüfen. Sie beziehen sich auf Grundwissen, das für ein Studium unbedingt vorausgesetzt werden muss. Für die Lösung der drei unten angegebenen Aufgaben sollten Sie nur wenige Minuten benötigen. Die Aufgaben wurden dem WiMINT-Eignungstest für die Klassenstufe 10, basierend auf dem Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der cosh-Arbeitsgruppe entnommen. Diese Aufgaben werden nicht korrigiert und auch nicht in die Bewertung einbezogen. Lösungen bzw. Lösungshinweise werden aber jeweils auf den Übungsblättern (eine Woche nachdem die Aufgaben hier gestellt werden) veröffentlicht.

Z 3.1. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & 2x+y & = & 4 \\ \mathrm{II} & x-7y & = & 3 \end{array}$$

a) Skizzieren Sie die beteiligten Geraden und bestimmen Sie graphisch die Lösungsmenge des Gleichungssystems.
b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem exakt.
c) Vergleichen und interpretieren Sie die beiden Ergebnisse.
d) Wir ändern in der zweiten Gleichung den Koeffizienten vor y so, dass es keine Lösung gibt. Was können Sie in diesem Fall über die Lage der beiden Geraden aussagen?

Lösungen der freiwilligen Zusatzaufgaben aus Übungsserie 2

Z 2.1. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$ und $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$. Dazwischen liegt $\frac{13}{16}$.
Erneutes Erweitern für weiteren Bruch dazwischen liefert z. B. $\frac{3}{4} = \frac{24}{32} < \frac{25}{32} < \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$.

Z 2.2. Variante 1:
$$\begin{aligned}(x+1)\cdot(x-1)-(2x-1)\cdot(1-x) &= x^2-1-(2x-2x^2-1+x)\\ &= x^2-1-3x+2x^2+1\\ &= 3x^2-3x\\ &= 3x(x-1)\end{aligned}$$
Variante 2:
$$\begin{aligned}(x+1)\cdot(x-1)-(2x-1)\cdot(1-x) &= (x-1)\cdot\Big((x+1)+(2x-1)\Big)\\ &= (x-1)\cdot 3x\\ &= 3x(x-1)\end{aligned}$$

Z 2.3. $f(x) = a\cdot(x-(-3))\cdot(x-(-1))\cdot(x-2) = a(x+3)(x+1)(x-2)$
$f(0) = 3$

Z 2.4. $\dfrac{x^2+2x}{x+2} = \dfrac{x(x+2)}{x+2} \overset{\text{Kürzen } x+2}{=} x \quad$ für $x \neq -2$.