

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsserie 5
Abgabe am 27.11.2017

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

5.1 (a) Lösen Sie folgende Divisionsaufgaben in \mathbb{C} : 2 Pkt.

$$(3 + 4i) : (2 - 5i)$$

$$(1 + i) : (1 - i)$$

(b) Lösen Sie folgende Gleichungen in \mathbb{C} mithilfe quadratischer Ergänzung. Setzen Sie dann Ihre Lösungen in die Ausgangsgleichungen ein, um sie zu überprüfen. 4 Pkt.

(i) $z^2 - 6z + 12 = 0$

(ii) $z^2 + 4iz - 13 = 0$

5.2 (a) Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in die Polarform $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ um:

(i) $z_1 = 1 - i$ 3 Pkt.

(ii) $z_2 = -6 + 8i$

(b) Bilden Sie das Produkt der Zahlen z_1 und z_2 aus Aufgabenteil (a) in der Polarform. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem in gewöhnlicher Form gebildeten Produkt der beiden Zahlen. 2 Pkt.

(c) Berechnen Sie die Quadratwurzeln von $z = 2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot i$. 3 Pkt.

Geben Sie die Ergebnisse in der Form $a + bi$ an. Lösen Sie die Aufgabe *ohne Verwendung des Taschenrechners* und ermitteln Sie *exakte Ergebnisse* (keine Näherungswerte).

5.3 Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^n = q$ (mit $q \neq 0$) in \mathbb{C} genau n verschiedene Lösungen hat und geben Sie diese Lösungen an. 6 Pkt.

Hinweis: Arbeiten Sie mit der Polarform und wenden Sie die Formel von Moivre an:

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$$

Freiwillige Aufgaben zur Wiederholung von Schulwissen

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen helfen, Ihr mathematisches Schulwissen zu überprüfen. Sie beziehen sich auf Grundwissen, das für ein Studium unbedingt vorausgesetzt werden muss. Die folgenden beiden Aufgaben sind Schulbüchern der Jahrgangsstufe 9 entnommen. Diese Aufgaben werden nicht korrigiert und auch nicht in die Bewertung einbezogen. Lösungen bzw. Lösungshinweise werden aber jeweils auf den Übungsblättern (eine Woche nachdem die Aufgaben hier gestellt werden) veröffentlicht.

Z 5.1. Die folgende Aufgabe stammt aus einem der bekanntesten Mathematikbücher aller Zeiten, der 1767/68 erschienenen „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ von LEONHARD EULER.

Einer kauft 12 Stück Tuch für 140 Reichsthaler, und zwar 2 weiße, 3 schwarze und 7 blaue. Ein Stück schwarzes Tuch kostet 2 Reichsthaler mehr als ein weißes, und ein blaues 3 Reichsthaler mehr als ein schwarzes. Nun ist die Frage, wie viel jedes gekostet?

Z 5.2. Anja, Berta und Claudius fahren mit dem Rad von demselben Ausgangspunkt aus zur Schule. Anja startet um 7.30 Uhr, Berta um 7.33 Uhr, Claudius um 7.35 Uhr. Anja fährt im Durchschnitt 3 km/h langsamer als Berta, Claudius um 3 km/h schneller. Alle drei kommen zugleich an. Wie lange braucht Berta und wie schnell fährt sie? Wie lang ist der Weg zur Schule?

Lösungen der freiwilligen Zusatzaufgaben aus Übungsserie 4

Z 4.1 Es seien x, y die benötigten Massen der beiden Stahlsorten. Dann lässt sich das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) aufstellen:

$$\begin{aligned}x + y &= 200 \\0,2x + 0,3y &= 0,225 \cdot 200.\end{aligned}$$

Als (eindeutige) Lösung dieses LGS erhält man $x = 150, y = 50$. Man benötigt also 150 kg Stahl der ersten Sorte und 50 kg Stahl der zweiten Sorte.

Z 4.2 Es sei c der Preis einer Flasche Cola, s der einer Flasche Apfelsaft.

$$\begin{aligned}16c + 12s &= 36,52 \\8c + 20s &= 34,92.\end{aligned}$$

Als (eindeutige) Lösung dieses LGS erhält man $c = 1,39 \text{ €}, s = 1,19 \text{ €}$.