

Übungsaufgaben zur Vorlesung  
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 7

Abgabe am 11.12.2017

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden **Montags vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

7.1 (a) Für welche  $a \in \mathbb{R}$  hat das LGS

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + a x_3 &= 2 \\2 x_1 + a x_2 - x_3 &= 1 \\3 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 &= a\end{aligned}$$

keine, genau eine, mehr als eine Lösung?

3 Pkt.

*Hinweis:* Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix in die Zeilenstufenform und untersuchen Sie die Ränge der einfachen und der erweiterten Koeffizientenmatrix in Abhängigkeit von  $a$ . Begründen Sie Ihre Antworten knapp aber präzise.

(b) Ermitteln Sie für  $a=2$  und für  $a=3$  jeweils die Lösungsmenge des LGS.

2 Pkt.

(c) Beweisen Sie den folgenden Teil eines Satzes aus der Vorlesung: Ist  $\vec{x}^{(0)}$  eine beliebige Lösung eines inhomogenen LGS und  $\vec{x}^{(h)}$  eine beliebige Lösung des zugehörigen homogenen LGS, so ist die Summe  $\vec{x}^{(0)} + \vec{x}^{(h)}$  eine Lösung des inhomogenen LGS.

3 Pkt.

7.2 Bestimmen Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme die Ränge der einfachen und der erweiterten Koeffizientenmatrix und geben Sie die Lösungsmengen an.

5 Pkt.

$$\begin{array}{l}3 x_1 + 6 x_2 + 2 x_3 + x_4 = 9 \\2 x_1 + x_2 + 4 x_3 + 3 x_4 = 9 \\x_1 + 2 x_2 + 2 x_4 = 9 \\4 x_1 + 3 x_3 + 2 x_4 = 9\end{array} \quad \begin{array}{l}(a) \\(b) \\2 x_1 + x_2 - x_3 + 5 x_4 = 2 \\- 2 x_2 + 3 x_4 = 2 \\2 x_1 + 3 x_2 - x_3 + 3 x_4 = 1\end{array}$$

Geben Sie jeweils zusätzlich die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS an.

7.3 Es sind zwei Lösungen eines unbekanntes LGS in vier Variablen gegeben:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(a) Geben Sie drei weitere Lösungen an, die jedes LGS, das diese beiden Lösungen hat, ebenfalls besitzen muss.

1 Pkt.

(b) Geben Sie nun eine Lösung des LGS an, deren erste Komponente 50 ist – die Lösung

soll also die Form  $\begin{pmatrix} 50 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  haben.

1 Pkt.

(c) Begründen Sie für Ihre unter (a) und (b) angegebenen Lösungen unter Verwendung von Sätzen aus der Vorlesung, dass es sich tatsächlich um Lösungen handelt.

3 Pkt.

(d) Ein inhomogenes LGS mit zwei Variablen besitzt die Lösungen  $(2; 1)$  und  $(5; 7)$ . Zeigen Sie, dass dann auch alle Paare der Form  $(2+t; 1+2t)$  mit  $t \in \mathbb{R}$  Lösungen sind.

2 Pkt.

## Freiwillige Aufgaben zur Wiederholung von Schulwissen

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen helfen, Ihr mathematisches Schulwissen zu überprüfen. Sie beziehen sich auf Grundwissen, das für ein Studium unbedingt vorausgesetzt werden muss. Für die Lösung der drei unten angegebenen Aufgaben sollten Sie nur wenige Minuten benötigen. Die Aufgaben wurden dem WiMINT-Eignungstest für die Klassenstufe 10, basierend auf dem Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der cosh-Arbeitsgruppe entnommen. Diese Aufgaben werden nicht korrigiert und auch nicht in die Bewertung einbezogen. Lösungen bzw. Lösungshinweise werden aber jeweils auf den Übungsblättern (eine Woche nachdem die Aufgaben hier gestellt werden) veröffentlicht.

Z 7.1. Ein Spielwarengeschäft wirbt mit dem Slogan „Bis zu 60% sparen“. Für jeden Artikel (auch schon reduzierte) gibt es an der Kasse noch einmal 20% Rabatt.

Tim findet einen LKW für 50 Euro, auf den es 50% Rabatt gibt und meint: „Der Slogan ist ja falsch, ich kriege für den LKW insgesamt sogar 70% Rabatt.“

Was meinen Sie dazu? Stimmt der Slogan? Wie viel muss Tim am Ende für den LKW bezahlen?

Z 7.2. Die Terme links vom Gleichheitszeichen sollen nach den Potenzgesetzen umgeformt werden. Welche Umformungen sind richtig? Korrigieren Sie die falschen Umformungen.

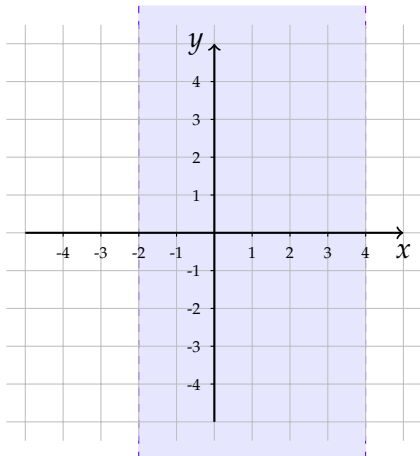
	richtig	falsch und Korrektur
$2^{-3} = -8$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> ...
$\sqrt[9]{\frac{2}{6}} = \frac{\sqrt[9]{2}}{\sqrt[9]{6}}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> ...
$\frac{2^m}{2^n} = 2^{\frac{m}{n}}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> ...
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[7]{2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> ...
$(\sqrt[9]{2})^3 = 2^{\frac{1}{3}}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> ...

## Lösungen der freiwilligen Zusatzaufgaben aus Übungsserie 6

Z 6.1. Einsetzen der Nullstellen:  $g(x) = a(x + \frac{1}{2})(x - 1)(x - 5)$

Einsetzen des Punktes:  $-2 = g(0) = a \cdot \frac{5}{2}$ , also  $a = -\frac{4}{5}$

Z 6.2. a)



b) Liegt der Punkt  $P(3;5)$  in  $A$ ?  $\rightarrow$  Ja.

c) In  $A$  liegen genau die Punkte  $(x;y)$ , deren  $x$ -Koordinate von 1 weniger als 3 entfernt ist.