Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2017/18

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 8

Abgabe am 18.12.2017

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

1. (a) Weisen Sie mithilfe der Vektorraumaxiome und der Folgerungen F1-F3 nach: Für jeden Vektor $\vec{u}$ ist der Gegenvektor $-\vec{u}$ eindeutig bestimmt. 2 Pkt.

   (b) Weisen Sie nach, dass in jedem Vektorraum V über einem Körper K für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und alle $\mu, \lambda \in K$ gilt: Falls $\mu \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ und $\vec{u} \neq \vec{o}$, so ist $\mu = \lambda$. 2 Pkt.

2. Es seien $\vec{a} \neq \vec{o}, \vec{b} \neq \vec{o}$ beliebige Vektoren eines Vektorraumes V über $\mathbb{R}$. Weisen Sie nach:

   (a) Ist $\vec{a}$ kein Vielfaches von $\vec{b}$ (existiert also kein $r \in \mathbb{R}$ mit $\vec{a} = r\vec{b}$) und gilt $\vec{o} = \lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{b}$, so ist $\lambda = \mu = 0$. 2 Pkt.

   (b) Ist $\vec{a}$ kein Vielfaches von $\vec{b}$ und lässt sich ein Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen, so ist diese Darstellung eindeutig, d. h. aus $\vec{c} = \lambda_1\, \vec{a} + \mu_1\, \vec{b}$ und $\vec{c} = \lambda_2\, \vec{a} + \mu_2\, \vec{b}$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\mu_1 = \mu_2$. 2 Pkt.

3. (a) Für ein beliebiges (aber festes) $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$P_n = \left\{ p \;\middle|\; p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k;\;\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R};\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

   der Polynome höchstens n-ten Grades mit den durch

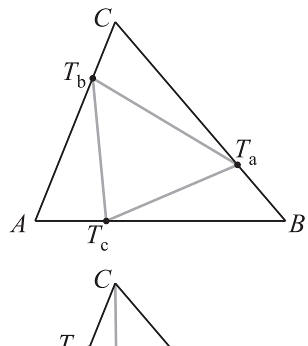
$$(p+q)\,(x) \;:=\; p(x) + q(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, x^k$$

$$(\lambda \cdot p)\,(x) \;:=\; \lambda \cdot p(x) \;=\; \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \lambda\, a_k\, x^k$$

   gegebenen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum. (Dies müssen Sie nicht beweisen.)
   Warum ist für $n \geq 1$ die Menge aller Polynome *genau* n-ten Grades *kein* Vektorraum? Geben Sie mindestens drei Stellen der Definition des Begriffs Vektorraum an, die hierbei verletzt würden. 2 Pkt.

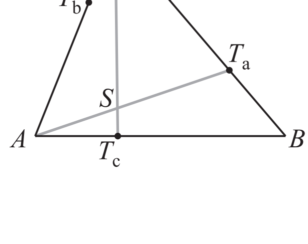
   (b) Formulieren und beweisen Sie (mithilfe von Vektoren) die *Umkehrung* des folgenden Satzes über Vierecke: *In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.* 3 Pkt.

   Die Seiten eines Dreiecks ΔABC werden durch drei Punkte T_a, T_b und T_c jeweils in demselben Verhältnis $1 : m$ $(m \in \mathbb{R}, m > 0)$ geteilt.



   (c) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $\Delta T_a T_b T_c$ mit dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ΔABC identisch ist (und somit beide Dreiecke denselben Schwerpunkt besitzen). 3 Pkt.

   (d) Bestimmen Sie für $m = 2$ die Verhältnisse, in denen die Strecken AT_a und CT_c einander teilen.
   Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $\overrightarrow{AS} = \lambda\, \overrightarrow{AT_a}$, $\overrightarrow{CS} = \mu\, \overrightarrow{CT_c}$ und drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AT_a}$ und $\overrightarrow{CT_c}$ als Linearkombinationen von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aus. Mittels $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS}$ erhalten Sie eine Darstellung für $\overrightarrow{AS}$, in der μ auftritt. Ermitteln Sie λ und μ durch Koeffizientenvergleich (siehe Aufgabe 2b). 4 Pkt.



Freiwillige Aufgaben zur Wiederholung von Schulwissen

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen helfen, Ihr mathematisches Schulwissen zu überprüfen. Sie beziehen sich auf Grundwissen, das für ein Studium unbedingt vorausgesetzt werden muss. Für die Lösung der drei unten angegebenen Aufgaben sollten Sie nur wenige Minuten benötigen. Die Aufgaben wurden dem WiMINT-Eignungstest für die Klassenstufe 10, basierend auf dem Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der cosh-Arbeitsgruppe entnommen. Diese Aufgaben werden nicht korrigiert und auch nicht in die Bewertung einbezogen. Lösungen bzw. Lösungshinweise werden aber jeweils auf den Übungsblättern (eine Woche nachdem die Aufgaben hier gestellt werden) veröffentlicht.

Z 8.1. Vereinfachen Sie die Terme so weit wie möglich. Schreiben Sie Ihre Rechenschritte auf.

$$\frac{a^3 \cdot b^3 \cdot a}{a \cdot b^{-2}} \qquad \frac{a^4}{b^2} : \frac{a}{b^2} \qquad \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{a \cdot b}$$

Z 8.2. Gegeben ist folgende Ungleichung: $|x-3| < 2$.

Felix sagt: „Ich betrachte zwei Fälle."

1. $x \geq 0$, dann muss $x - 3 < 2$ gelten. Also $x < 5$.
2. $x < 0$, dann muss $-x - 3 < 2$ gelten. Also $x > -5$.

- Felix hat einen Verständnisfehler. Welcher ist es?
- Lösen Sie die Aufgabe und schreiben Sie Ihren Rechenweg ausführlich auf.

Lösungen der freiwilligen Zusatzaufgaben aus Übungsserie 7

Z 7.1. Preis für LKW nach allen Rabatten: $\Big(50 \cdot 0,5\Big) \cdot (1 - 0,2) = 25 \cdot 0,8 = 20$

Ersparnis in %: $\frac{50-20}{50} = \frac{3}{5} = 60\%$. Der Slogan stimmt.

Z 7.2.

			richtig	falsch und Korrektur
2^{-3}	$=$	-8	$\square$	$\times$ $\quad 2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\sqrt[9]{\frac{2}{6}}$	$=$	$\frac{\sqrt[9]{2}}{\sqrt[9]{6}}$	$\times$	$\square \ldots$
$\frac{2^m}{2^n}$	$=$	$2^{\frac{m}{n}}$	$\square$	$\times$ $\quad \frac{2^m}{2^n} = 2^{m-n}$
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$	$=$	$\sqrt[7]{2}$	$\square$	$\times$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
$(\sqrt[9]{2})^3$	$=$	$2^{\frac{1}{3}}$	$\times$	$\square \ldots$