Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2017/18

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 9

Abgabe am 08.01.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

1. (a) Weisen Sie nach, dass die Menge aller 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ein Unterraum des Vektorraumes aller Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit 2 Zeilen und 2 Spalten ($a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$) und mit den folgendermaßen definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist: 3 Pkt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} \\ \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} \end{pmatrix}.$$

   (b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind und überprüfen Sie, welche(r) der Vektoren sich als Linearkombination der jeweils drei anderen Vektoren darstellen lässt/lassen. 3 Pkt.

2. (a) Beweisen Sie: Sind M und N Teilmengen eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes mit $M \subset N$ und ist M linear abhängig, so ist N ebenfalls linear abhängig. 4 Pkt.

   (b) Folgt aus der linearen Unabhängigkeit von zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auch die lineare Unabhängigkeit von $\vec{u} - \vec{v}$ und $\vec{u} + \vec{v}$? Begründen Sie Ihre Antwort. 3 Pkt.

3. Gegeben sind die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^2$: 7 Pkt.

   $U_1 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, $U_2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$, $U_3 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$.

   Welche der folgenden Aussagen ist (sind) richtig?

   a) $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ ist ein Erzeugendensystem von $U_1 \cap U_2$.

   b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ ist eine linear unabhängige Teilmenge von U_2.

   c) Es gilt $U_1 \cup U_3 = \mathbb{R}^2$.

   d) Es gilt $\operatorname{span}(U_1 \cup U_3) = \mathbb{R}^2$.

   e) Es gilt $U_1 + U_3 = \mathbb{R}^2$.

   Begründen Sie kurz Ihre Antworten.

Zusatzaufgabe siehe nächste Seite.

Weihnachts-Zusatzaufgabe

Z. Die Klimaerwärmung hat die Population an fliegenden Rentieren drastisch dezimiert. Der Weihnachtsmann möchte deswegen dieses Jahr für Europa auf die robusteren Albatrosse zurückgreifen. Zur besseren Planung hat der Weihnachtsmann ein Koordinatensystem mit Ursprung $(0, 0)$ in der Weihnachtsmannzentrale in den Karpaten über die Europakarte gelegt, so dass der Vektor $(1, 0)$ nach Norden und der Vektor $(0, 1)$ nach Osten zeigt. Albatrosse orientieren sich an den Sternen und können deswegen nur entlang der beiden Richtungen fliegen, die durch die Vektoren $(3, 4)$ und $(3, -4)$ gegeben sind. Sie können aber im Flug zwischen diesen beiden Richtungen wechseln. Beantworten Sie die folgenden Fragen des Weihnachtsmanns. Begründen Sie:

a) Tante Käthes Haus steht auf den Koordinaten $(12, -230)$. Kann Sie mit Geschenken beliefert werden? 1 ZP[1]

b) Welche Koordinaten können überhaupt beliefert werden? 3 ZP

c) Pavel wohnt in Warschau, 360 km nördlich und 120 km westlich von der Zentrale. Magda wohnt bei Wien, 120 km nördlich und 360 km westlich von der Zentrale. Wie viele Kilometer müssen die Albatrosse jeweils fliegen, um die beiden zu beliefern? Begründen Sie zeichnerisch, warum die Flugstrecken verschieden lang sind. 3 ZP

d) Der Weihnachtsmann hat einmal gehört, dass Albatrosse nur 500 km weit fliegen können. Bildet unter dieser Bedingung die Menge der Koordinatenpaare, die mit Geschenken beliefert werden können, einen Vektorraum? 3 ZP

Hinweis: Wir vernachlässigen die Erdkrümmung.

[1] ZP steht für Zusatzpunkt. Sie können damit bis zu 10 in den regulären Übungsserien ggf. nicht erreichte Punkte ausgleichen.