Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2017/18

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 10

Abgabe am 15.01.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

1. (a) Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist eine Vektormenge $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig und ist ein Vektor $\vec{v}$ von $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ linear unabhängig, so ist auch die Menge $\{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k; \vec{v}\}$ linear unabhängig. 4 Pkt.

   (b) Es seien $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ beliebige Vektoren. Weisen Sie nach, dass $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{w}$ und $\vec{w}-\vec{u}$ linear abhängig sind. 1 Pkt.

2. (a) Zeigen Sie, dass $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. 2 Pkt.

   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ bzgl. der Basis C: 2 Pkt.

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ -17 \end{pmatrix}; \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. (a) Begründen Sie, dass 3 Pkt.

   $$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0\,;\; 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

   ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist und geben Sie eine Basis dieses Unterraumes an.

   (b) Zeigen Sie, dass 3 Vektoren der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix}$

   mit $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$ stets eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. 3 Pkt.

   (c) Beweisen Sie den Basisergänzungssatz: 5 Pkt.

   Es seien V ein Vektorraum, $U = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_k\}$ eine linear unabhängige Teilmenge und $E = \{\vec{e}_1; \ldots; \vec{e}_l\}$ ein Erzeugendensystem von V. Dann lässt sich U durch Elemente von E zu einer Basis von V ergänzen.

   Hinweis: Es dürfen für den Beweis nur die in der Vorlesung *vor* dem Basisergänzungssatz formulierten Sätze verwendet werden. Insbesondere darf der Steinitzsche Austauschsatz *nicht* genutzt werden.