Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2017/18

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 11

Abgabe am 22.01.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

1. (a) Begründen Sie: 2 Pkt.

   Ist $B = \{\vec{b}_1; \ldots ; \vec{b}_n\}$ eine Basis und $U = \{\vec{u}_1; \ldots ; \vec{u}_n\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V, die ebenso viele Elemente enthält wie B, so ist U ebenfalls eine Basis von V.

   (b) Begründen Sie: 2 Pkt.

   Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum und E ein ES von V, das aus n Vektoren besteht, so ist E eine Basis von V.

2. Gegeben ist die folgende Basis des Vektorraumes der magischen 3×3-Quadrate:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Geben Sie eine Basis B' des Vektorraumes der magischen Quadrate der Kantenlänge 3 an, in der das magische Quadrat $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ auftritt und begründen Sie, dass es sich dabei tatsächlich um eine Basis handelt. 3 Pkt.

3. (a) Weisen Sie nach:

   Sind U und V lineare Unterräume sowie $E_U = \{\vec{u}_1; \ldots ; \vec{u}_k\}$ und $E_V = \{\vec{v}_1; \ldots ; \vec{v}_m\}$ Erzeugendensysteme von U bzw. V, so ist die Summe der Unterräume U und V identisch mit der linearen Hülle der Vektormenge $E_U \cup E_V$, d. h.
   $U + V = \operatorname{span}\,(\vec{u}_1, \ldots , \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots , \vec{v}_m)$. 8 Pkt.

   (b) Gegeben sind die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$: 5 Pkt.

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 = x_2 \, ; \; x_3 = x_4 \right\}$$

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \, ; \; 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

   Bestimmen Sie die Dimensionen der vier Unterräume U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$. Welchen Zusammenhang erkennen Sie zwischen den Dimensionen?

   Hinweise:
   - U_1 und U_2 sind Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme. Wie lässt sich dann $U_1 \cap U_2$ ausdrücken?
   - Um $\dim(U_1 + U_2)$ zu bestimmen, ermitteln Sie Basen von U_1 und U_2. Die Vereinigungsmenge dieser Basen ist ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ (warum?). Überprüfen Sie, ob dieses ES linear unabhängig ist und – falls dies nicht zutrifft – reduzieren Sie es zu einer Basis von $U_1 + U_2$.