Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2017/18

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsserie 12

Abgabe am 29.01.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

1. Welche der folgenden Abbildungen sind lineare Abbildungen? Beweisen Sie Ihre Antworten. 5 Pkt.

   (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

   (c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ x \end{pmatrix}$

   (d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

2. Welche der unter 1. (a) - (d) gegebenen Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv? (Überprüfen Sie dies sowohl für die linearen Abbildungen als auch für diejenigen Abbildungen, die keine linearen Abbildungen sind, geben Sie kurze Begründungen.)

   (2 Punkte für Beispiel (a), je 1 Punkt für die anderen Beispiele) 5 Pkt.

3. (a) Gegeben sind ein reelles Intervall $I = [a; b]$ sowie die Mengen F_I aller auf I definierten und D_I aller auf I differenzierbaren reellwertigen Funktionen. Ist die lineare Abbildung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : D_I \to F_I$, gegeben durch $f \mapsto f'$, die jeder Funktion $f \in D_I$ ihre erste Ableitung zuordnet, injektiv? (Begründen Sie Ihre Antwort.) 1 Pkt.

   (b) Begründen Sie, dass es keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geben kann, die folgende Zuordnungen trifft: $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2 Pkt.

   (c) Begründen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass folgende Aussage falsch ist:
   Eine linear unabhängige Vektormenge von V wird durch eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ stets auf eine linear unabhängige Menge von W abgebildet. 2 Pkt.

   (d) Weisen Sie nach: Ist $f\colon V \to W$ eine injektive lineare Abbildung, so wird durch f eine beliebige linear unabhängige Vektormenge von V auf eine linear unabhängige Menge von W abgebildet. 5 Pkt.