**Anhang**

**Definition des Begriffs Vektorraum**

Es sei $K$ ein Körper. Eine nicht leere Menge $V$ zusammen mit einer inneren Verknüpfung

$$+ : V \times V \to V\,, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$$

und einer äußeren Verknüpfung

$$\cdot : K \times V \to V\,, \quad (\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda \cdot \vec{u}$$

heißt *Vektorraum* über dem Körper $K$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

A1. Für beliebige $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (*Kommutativität der Addition)*.

A2. Für beliebige $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(*Assoziativität der Addition*).

A3. Es existiert $\vec{o} \in V$, so dass für alle $\vec{u} \in V$ gilt: $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$
(*Existenz eines Nullvektors*).

A4. Zu jedem $\vec{u} \in V$ existiert $-\vec{u} \in V$ mit $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$
(*Existenz eines Gegenvektors zu jedem Vektor*).

S1. Für beliebige $\vec{u} \in V$ gilt $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

S2. Für beliebige $\vec{u} \in V$ und beliebige $\lambda, \mu \in K$ gilt $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$
(*Assoziativität der Multiplikation von Vektoren mit Elementen von K*).

S3. Für beliebige $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und beliebige $\lambda \in K$ gilt $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
(*1. Distributivgesetz*).

S4. Für beliebige $\vec{u} \in V$ und beliebige $\lambda, \mu \in K$ gilt $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
(*2. Distributivgesetz*).

Ist $K = \mathbb{R}$, so heißt $V$ auch $\mathbb{R}$-*Vektorraum* oder *reeller Vektorraum*.

**Definition des Begriffs affiner Raum**

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Eine nicht leere Menge $A$ heißt *affiner Punktraum* bzw. kurz *affiner Raum* über dem Vektorraum $V$, falls eine Verknüpfung $+ : A \times V \to A$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

(i) Für beliebige $P \in A$ gilt $P + \vec{o} = P$.

(ii) Für beliebige $P, Q \in A$ existiert genau ein Vektor $\vec{v} \in V$ mit $Q = P + \vec{v}$.

(iii) Für beliebige $P \in A$ und $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt $P + (\vec{u} + \vec{v}) = (P + \vec{u}) + \vec{v}$.

**Definition des Vektorprodukts**

Es sei $(V, \langle\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Unter dem[1] Vektorprodukt auf $(V, \langle\rangle)$ versteht man eine Verknüpfung $\times : V \times V \to V$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\times$ ist bilinear, d. h. f. a. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}), \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}),$
$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \quad \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

(2) $\times$ ist schiefsymmetrisch, d. h. f. a. $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

(3) Sind $\vec{a}, \vec{b}$ orthogonale Einheitsvektoren, so ist $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ eine Orthonormalbasis mit gleicher Orientierung wie die Standardbasis (falls $V = \mathbb{R}^3$) bzw. wie eine vorgegebene als rechtshändig festgelegte Basis.

**Additionstheoreme der Sinus- und Kosinusfunktion**

$\sin(x \pm y) = \sin x \ \cos y \pm \cos x \ \sin y$
$\cos(x \pm y) = \cos x \ \cos y \mp \sin x \ \sin y$

[1] Der bestimmte Artikel ist aufgrund eines (in der Vorlesung bewiesenen) Satzes gerechtfertigt, der Existenz und Eindeutigkeit einer Verknüpfung mit den in der Definition aufgeführten Eigenschaften beinhaltet.