Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Aufgaben für den Zweitsemester-Lerntag

Bemerkung: Die folgenden Aufgaben sind als *Ergänzung zu den Übungsaufgaben* gedacht. Diese stehen (mit Musterlösungen) unter

http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/de/personen/professoren/filler/lehre-filler/lineare-algebra-und-analytische-geometrie-ii

zur Verfügung. Es ist auf jeden Fall sinnvoll, diese noch einmal durchzugehen und zu überprüfen, wo diesbezüglich noch Verständnislücken bestehen.

Rechenaufgaben

Die ersten beiden Aufgaben sind inhaltlich noch der Linearen Algebra I zuzuordnen. Sie werden hier gestellt, da die hierbei auftretenden Berechnungen fundamental sind und eine wesentliche Grundlage auch für Berechnungen bilden, die zu den Themen der Linearen Algebra II gehören.

1. Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$ und geben Sie Basen der von den Zeilen- und den Spaltenvektoren dieser Matrix erzeugten linearen Unterräume an.

2. Gegeben ist eine lin. Abb. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Bilder der Vektoren der Basis $B = \left\{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\right\}$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, nämlich: $f(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, f(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, f(\vec{b}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Geben Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}^f_{BB_0^3}$ an.
   (Mit B_0^3 wird die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.)
   (b) Geben Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}^f_{B_0^3 B_0^3}$ an.
   (c) Geben Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}^f_{BB}$ an.
   (d) Ist f injektiv, surjektiv bzw. sogar bijektiv (jeweils mit Begründung)?
   (e) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.
   (f) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f.

3. Gegeben sind zwei geordnete Basen B und C von $\mathbb{R}^3$:
$$B = \left\{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad C = \{\vec{c}_1; \vec{c}_2; \vec{c}_3\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$
   und eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit folgender Matrix bezüglich der Basis B:
$$\mathbf{A}^f_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
   (a) Bestimmen Sie die die Transformationsmatrizen T^C_B und T^B_C.
   (b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}^f_{CC}$ von f bezüglich C.

(c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $\mathbf{A}_{BC}^f$ und $\mathbf{A}_{CB}^f$ auf jeweils zwei verschiedene Weisen (nämlich jeweils mit Benutzung von $\mathbf{A}_{BB}^f$ sowie von $\mathbf{A}_{CC}^f$).

4. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrix und zeigen Sie, dass diese diagonalisierbar ist:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
Geben Sie eine invertierbare Matrix $\mathbf{S}$ an, so dass $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{S}$ Diagonalgestalt hat.

5. Gegeben sind in $\mathbb{R}^3$ die Basis $B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\}$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und bezüglich dieser Basis ein Skalarprodukt durch die Gramsche Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Gramsche Matrix des so gegebenen Skalarproduktes bezüglich der Standardbasis B_0^3 und berechnen Sie das dadurch bestimmte Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Gegeben ist der Vektorraum $U := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Beweisaufgaben

1. Weisen Sie nach: Jeder Isomorphismus besitzt eine Umkehrabbildung und diese ist ebenfalls ein Isomorphismus. (Sie dürfen voraussetzen, dass jede bijektive Abbildung eine bijektive Umkehrabbildung besitzt.)

2. Weisen Sie nach: Ist die Determinante einer $n \times n$-Matrix Null, so ist der Rang der Matrix kleiner als n.

3. Beweisen Sie die Cramersche Regel: Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, wobei A regulär sei. Dann lassen sich die Komponenten x_i des (eindeutig bestimmten) Lösungsvektors $\vec{x}$ ausdrücken durch
$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$
für alle $i = 1 \ldots n$. Dabei ist A_i die Matrix, die gebildet wird, indem die i-te Spalte $\vec{a}_i$ der Koeffizientenmatrix A durch die rechte Seite $\vec{b}$ des Gleichungssystems ersetzt wird:
$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Weisen Sie nach: Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ einer linearen Abbildung f mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i, j \in \{1, \ldots, r\}, i \neq j$ so sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ linear unabhängig.

5. Beweisen Sie die Cauchy-Schwartzsche Ungleichung: Für beliebige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eines euklidischen Vektorraumes gilt $||\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|| \leq ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$.

6. Weisen Sie nach: Sind V, W euklidische Vektorräume und ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $||f(\vec{v})|| = ||\vec{v}||$ für alle $\vec{v} \in V$, so ist f eine orthogonale Abbildung.

7. Weisen Sie nach: Es sei A ein affiner Raum über einem Vektorraum V, und es seien N_1 und N_2 affine Unterräume von A mit zugehörigen linearen Unterräumen U_1 und U_2 von V. Ist die Schnittmenge $N_1 \cap N_2$ nicht leer, so ist $N_1 \cap N_2$ ein affiner Unterraum von A mit dem zugehörigen linearen Unterraum $U_1 \cap U_2$.

8. Beweisen Sie vektoriell (unter Nutzung des Skalarprodukts): Die drei Höhen eines beliebigen Dreieck schneiden sich in einem Punkt.