Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsserie 1

Abgabe am 30.04.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

Die **vorliegende Serie** enthält eine erhöhte Zahl von Aufgaben und wird mit **150%** der Punkte der sonstigen Übungsserien bewertet (30 statt 20 Punkte). Für Ihre Bearbeitung sind 12 Tage (anstatt einer Woche) vorgesehen.

1. (a) Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen: 3 Pkt. (1+2)
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Ist die Summe zweier regulärer Matrizen stets regulär?
Begründen Sie Ihre Antwort. 2 Pkt.

   (c) Weisen Sie nach: Sind $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reguläre Matrizen, so gilt: $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.
Hinweis: Wenden Sie den Satz an, dass $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \circ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ gilt, falls das Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ existiert. 3 Pkt.

2. (a) Gegeben ist eine 2×2-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Leiten Sie eine (notwendige und hinreichende) Bedingung (Gleichung bzw. Ungleichung in den Koeffizienten a, b, c, d) dafür her, dass $\mathbf{A}$ regulär ist und berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$. 3 Pkt.

   (b) Berechnen Sie die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. 4 Pkt.

   (c) Beweisen Sie, dass die Nacheinanderausführung $g \circ f$ linearer Abbildungen $f : U \to V$ und $g : V \to W$ eine lineare Abbildung ist. 3 Pkt.

3. (a) Beweisen Sie: Zwei (endlichdimensionale) Vektorräume V und W sind genau dann isomorph zueinander, wenn $\dim V = \dim W$ gilt. 5 Pkt.

4. (a) Bilden Sie die beiden Nacheinanderausführungen der Drehung
$d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $d\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$ und der zentrischen Streckung
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$. Geben Sie jeweils die Abbildungsmatrix an. 4 Pkt.

   (b) In welcher Reihenfolge lassen sich die Drehung d (siehe oben) und die Projektion
$p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $p\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nacheinander ausführen? Begründen Sie Ihre Antwort.
Geben Sie für diese Nacheinanderausführung eine Abbildungsmatrix an. 3 Pkt.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen. Sie werden hier auf den Wunsch von Studierenden hin bereitgestellt, es sei dazu aber ausdrücklich gesagt, dass es sich nur zum Teil um vollständige Musterlösungen handelt. Des Weiteren ist zu sagen, dass es natürlich für viele Aufgaben auch andere als die hier skizzierten Lösungswege geben kann.

1a. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{21} & -\frac{5}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1b. Angabe eines einfachen Gegenbeispiels genügt, z. B. falls $\mathbf{A}$ invertierbar, so ist auch $(-1)\cdot\mathbf{A}$ invertierbar, nicht aber $\mathbf{A} + (-1)\cdot\mathbf{A}$

1c. Für beliebige $n\times n$-Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ existiert das Produkt $\mathbf{A}\circ\mathbf{B}$, und es gilt $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\circ\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}\circ\mathbf{B})^{\mathrm{T}}$ (Vorlesung). Insbesondere gilt also für eine reguläre Matrix $\mathbf{A}$ und ihre Inverse:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\circ(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_n^{\mathrm{T}}.$$

Da die Transponierte $\mathbf{E}_n^{\mathrm{T}}$ der Einheitsmatrix $\mathbf{E}_n$ selbst ist, folgt daraus $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\circ(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}_n$. Damit ist $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$ die Inverse zu $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, es gilt also $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

2a. Daraus, dass die beiden Spaltenvektoren linear unabhängig sein müssen, lässt sich die Bedingung $ad \neq bc$ für die Regularität der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ herleiten. Als inverse Matrix berechnet man

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

2b. $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

2c. Es seien $f: U \to V$ und $g: V \to W$ lineare Abbildungen. Zu zeigen ist, dass auch die Abbildung $g\circ f: U \to W$ linear ist. Wir zeigen die Additivität und die Homogenität von $g\circ f$ in einem Schritt. Dazu seien $\vec{u},\vec{v} \in V$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) &= g(f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})) \\ &= g(\lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v})) \\ &= \lambda g(f(\vec{u}))+\mu g(f(\vec{v})) \\ &= \lambda(g\circ f)(\vec{u})+\mu(g\circ f)(\vec{v}).\end{aligned}$$

3a. $\Rightarrow$: Es seien V und W endlichdimensionale VR mit $\dim V = \dim W = n$, $B_V = \{\vec{b}_1;\vec{b}_2;\ldots;\vec{b}_n\}$ eine Basis von V und $B_W = \{\vec{c}_1;\vec{c}_2;\ldots;\vec{c}_n\}$ eine Basis von W. Wir definieren f durch $f(\vec{b}_1) = \vec{c}_1$, $f(\vec{b}_2) = \vec{c}_2$, …, $f(\vec{b}_n) = \vec{c}_n$. Dadurch ist eine lineare Abbildung f gegeben (Satz aus der Vorlesung). Wir weisen nach, dass f ein Isomorphismus ist.

Beweis 1:

Injektivität: Es seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei beliebige, verschiedene Vektoren aus V. Dann existieren $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ und $\mu_1,\ldots,\mu_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{b}_i \quad\text{und}\quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n}\mu_i\vec{b}_i,$$

wobei wegen $\vec{u} \neq \vec{v}$ mindestens ein i $(1 \leq i \leq n)$ mit $\lambda_i \neq \mu_i$ existiert. Wegen der Linearität von f ist

$$f(\vec{u}) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(\vec{b}_i) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{c}_i$$

und

$$f(\vec{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\vec{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i f(\vec{b}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i\vec{c}_i.$$

Da $B_W = \{\vec{c}_1; \vec{c}_2; \ldots; \vec{c}_n\}$ eine Basis ist und für mindestens ein i ($1 \leq i \leq n$) $\lambda_i \neq \mu_i$ gilt, sind die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ wegen der Eindeutigkeit der Darstellung eines Vektors als Linearkombination einer Basis voneinander verschieden, f ist also injektiv.

Surjektivität: Es sei $\vec{w}$ ein beliebiger Vektor aus W. Dann lässt er sich bezüglich der Basis $B_W = \{\vec{c}_1; \vec{c}_2; \ldots; \vec{c}_n\}$ als Linearkombination darstellen:
$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{c}_i$. Es lässt sich leicht zeigen, dass $\vec{w} = f(\vec{u})$ mit $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{b}_i$ ist. Damit besitzt jeder Vektor von W ein Urbild in V, f ist also surjektiv.

Beweis 2 der Hinrichtung:

Die Hinrichtung des Satzes lässt sich auch dadurch begründen, dass f eine reguläre Abbildungsmatrix $\mathbf{A}^f_{B_V B_W}$ besitzt. Entsprechend der Zuordnung von Matrizen zu linearen Abbildungen bezüglich zweier Basen ist $\mathbf{A}^f_{B_V B_W}$ die Einheitsmatrix $\mathbf{E}_n$ und somit regulär. Nach dem Satz[1] ist f daher ein Isomorphismus.

$\Leftarrow$: Sind V und W isomorph, so gibt es eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$. Wegen der Dimensionsformel gilt: $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f))$. Da f bijektiv ist, ist $\ker(f) = \left\{\vec{0}\right\}$ und $\operatorname{im}(f) = W$. Damit folgt: $\dim(V) = \dim(W)$.

4a. Verknüpft man die Drehmatrix $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ und die Streckungsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, so erhält man
$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha & -2\sin\alpha \\ 2\sin\alpha & 2\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Bei diesem Beispiel ist somit die Reihenfolge der Nacheinanderausführung nicht von Bedeutung.

4b. Es muss zuerst die Projektion $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ erfolgen, ehe in $\mathbb{R}^2$ gedreht werden kann, die mögliche Nacheinanderausführung ist also $d \circ p$. Eine Abbildungsmatrix der zusammengesetzten Abbildung ergibt sich als Produkt der Drehmatrix $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ mit der Projektionsmatrix $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{D} \circ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ist $\mathbf{A}^f_{B_V B_W}$ eine Abbildungsmatrix von f bezüglich einer Basis B_V von V und einer Basis B_W von W, so ist f genau dann ein Isomorphismus, wenn $\mathbf{A}^f_{B_V B_W}$ eine reguläre Matrix ist.