Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsserie 2

Abgabe am 07.05.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

1. Gegeben sind der $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis B_0^2 und die durch die Gleichung $y = \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot x$ beschriebene Gerade g. Eine „neue" Basis $B = \left\{\vec{b}_1;\vec{b}_2\right\}$ entsteht aus B_0^2 durch Drehung um $30°$ in mathematisch positivem Drehsinn.

   (a) Bestimmen Sie die die Transformationsmatrix $T_{B_0^2}^{B}$ und geben Sie die Basisvektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ an. 3 Pkt.

   (b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g in Koordinaten x', y' bezüglich der Basis B. 2 Pkt.

   Rechnen Sie nur mit *exakten Werten*, benutzen Sie also keinen Taschenrechner.

2. Gegeben ist eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Matrix von f bezüglich der geordneten Standardbasis $B_0^3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\mathbf{A}^f_{B_0^3 B_0^3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   Außerdem ist $B = \left\{\vec{b}_1;\vec{b}_2;\vec{b}_3\right\} = \left\{\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^3$.

   Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}^f_{BB}$ und die Transformationsmatrizen $T^B_{B_0^3}$ und $T^{B_0^3}_B$.
   Berechnen Sie weiterhin $T^B_{B_0^3} \circ \mathbf{A}^f_{BB} \circ T^{B_0^3}_B$ und $T^{B_0^3}_B \circ \mathbf{A}^f_{B_0^3 B_0^3} \circ T^B_{B_0^3}$. 6 Pkt.

3. Gegeben sind zwei geordnete Basen A und B von $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left\{\vec{b}_1;\vec{b}_2;\vec{b}_3\right\} = \left\{\begin{pmatrix}8\\-6\\7\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-16\\7\\-13\end{pmatrix};\begin{pmatrix}9\\-3\\7\end{pmatrix}\right\}, \quad C = \{\vec{c}_1;\vec{c}_2;\vec{c}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

   und eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit folgender Matrix bezüglich der Basis B:

$$\mathbf{A}^f_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie die die Transformationsmatrizen T^C_B und T^B_C. 3 Pkt.

   (b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}^f_{CC}$ von f bezüglich C. 2 Pkt.

   (c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen $\mathbf{A}^f_{BC}$ und $\mathbf{A}^f_{CB}$ auf jeweils zwei verschiedene Weisen (nämlich jeweils mit Benutzung von $\mathbf{A}^f_{BB}$ sowie von $\mathbf{A}^f_{CC}$). 4 Pkt.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen. Sie werden hier auf den Wunsch von Studierenden hin bereitgestellt, es sei dazu aber ausdrücklich gesagt, dass es sich nur zum Teil um vollständige Musterlösungen handelt. Des Weiteren ist zu sagen, dass es natürlich für viele Aufgaben auch andere als die hier skizzierten Lösungswege geben kann.

1. (a) $T^{B}_{B_0^2} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

   (b) $x' = y'$

2. Eine Möglichkeit, $\mathbf{A}^f_{BB}$ zu ermitteln besteht darin, die Bilder der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ zu bestimmen und dann als Linearkombinationen von $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ auszudrücken:
$$\mathbf{A}^f_{B_0^3B_0^3} \circ \vec{b}_1 = 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + 0\vec{b}_3\,,$$
$$\mathbf{A}^f_{B_0^3B_0^3} \circ \vec{b}_2 = 0\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 0\vec{b}_3\,,$$
$$\mathbf{A}^f_{B_0^3B_0^3} \circ \vec{b}_3 = 0\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3\,.$$
   Man erhält also
$$\mathbf{A}^f_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Bemerkung: Man könnte sich das auch sparen, denn man erhält ohnehin später $\mathbf{A}^f_{BB}$ mittels $\mathbf{A}^f_{BB} = T^{B_0^3}_{B} \circ \mathbf{A}^f_{B_0^3B_0^3} \circ T^{B}_{B_0^3}$.

   Die Transformationsmatrizen sind
$$T^{B}_{B_0^3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{B_0^3}_{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Es ergibt sich
$$T^{B}_{B_0^3} \circ \mathbf{A}^f_{BB} \circ T^{B_0^3}_{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^f_{B_0^3B_0^3} \quad \text{und} \quad T^{B_0^3}_{B} \circ \mathbf{A}^f_{B_0^3B_0^3} \circ T^{B}_{B_0^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^f_{BB}.$$

3. Um T^B_C zu bestimmen, müssen die Basisvektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ als Linearkombinationen von $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ ausgedrückt werden. Dazu sind die drei linearen Gleichungssysteme
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 8 \\ -2 & -1 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right), \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -16 \\ -2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -13 \end{array}\right) \text{ und } \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right)$$
   zu lösen, was zeitsparend durch simultane Umformungen möglich ist:
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 8 & -16 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -6 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & -13 & 7 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$
   In den Spalten der rechten Matrix stehen nun die Koeffizienten der Linearkombinationen von $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ bezüglich $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$, es ist also
$$T^B_C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Die Matrix T^C_B erhält man nach demselben Verfahren oder einfach durch Invertieren von T^B_C:
$$T^C_B = \left(T^B_C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$
   Damit lässt sich nun die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}^f_{CC}$ bestimmen:

$$\mathbf{A}^f_{CC} \;=\; T^B_C \circ \mathbf{A}^f_{BB} \circ T^C_B \;=\; T^B_C \circ \mathbf{A}^f_{BB} \circ \left(T^B_C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 47 & -88 \\ 18 & 44 & -92 \\ 12 & 27 & -59 \end{pmatrix}.$$

Analog berechnet man $\mathbf{A}^f_{BC}$ und $\mathbf{A}^f_{CB}$:

$$\mathbf{A}^f_{BC} \;=\; T^B_C \circ \mathbf{A}^f_{BB} \;=\; \begin{pmatrix} 7 & -13 & 22 \\ 6 & -2 & 14 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^f_{CB} \;=\; \mathbf{A}^f_{BB} \circ T^C_B \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 10 & -3 \\ -8 & 0 & 23 \\ -2 & 17 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ebenso ließen sich diese beiden Matrizen auch folgendermaßen berechnen:
$\mathbf{A}^f_{BC} = \mathbf{A}^f_{CC} \circ T^B_C,\ \mathbf{A}^f_{CB} = T^C_B \circ \mathbf{A}^f_{CC}$.