Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsserie 3

Abgabe am 14.05.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

Bemerkung:
Determinanten müssen in den Serien 3 und 4 „per Hand" berechnet werden, mit Darstellung des Lösungsweges.

1. Beweisen Sie für 2×2-Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ auf der Grundlage der „vorläufigen" Definition $\det \mathbf{A} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$:

   (a) Addiert man ein beliebiges Vielfaches einer Zeile einer 2×2-Matrix **A** zu der anderen Zeile von **A**, so bleibt die Determinante gleich. 2 Pkt.

   (b) Vertauscht man zwei Zeilen einer Matrix, so wechselt deren Determinante ihr Vorzeichen. 1 Pkt.

   (c) $\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{A}$, wobei $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ die Transponierte einer Matrix **A** ist. 1 Pkt.

   (d) $\det(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$. 2 Pkt.

   (e) Sind die Zeilenvektoren von **A** linear abhängig, so ist $\det \mathbf{A} = 0$. 2 Pkt.

2. (a) Weisen Sie nach: Die Ähnlichkeitsrelation auf der Menge der $n \times n$-Matrizen ist eine Äquivalenzrelation. 2 Pkt.

   (b) Weisen Sie nach: Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ hat, falls $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist, die eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit

   $$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det \mathbf{A}};\ x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \mathbf{A}}.$$ 4 Pkt.

3. Weisen Sie nach: Sind **A** und **B** reelle $n \times n$-Matrizen mit $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{0}$ aber $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, so gilt $\det(\mathbf{A}) = 0 = \det(\mathbf{B})$. (**0** ist die Matrix, die nur Nullen enthält.) 2 Pkt.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ist und zeigen Sie, dass Sie dadurch einen Widerspruch erhalten; zu welchen Aussagen ist $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ äquivalent?

4. Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen: 4 Pkt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 1 \\ 9 & 0 & -13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen.

1a. Durch Addieren des λ-fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile entsteht die Matrix $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda\, a_{12} \end{pmatrix}$. Ihre Determinante ist

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}' &= a_{11}\,(a_{22}+\lambda\, a_{12}) - a_{12}\,(a_{21}+\lambda a_{11}) \\ &= a_{11}a_{22} + \lambda a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{12}a_{11} \;=\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \;=\; \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Für die Addition des λ-fachen der zweiten Zeile zur ersten Zeile geht man analog vor.

1b. Durch Zeilenvertauschung entsteht $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$. Es gilt

$\det \mathbf{A}' = a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21} = a_{21}\,a_{12} - a_{22}\,a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\det \mathbf{A}.$

1c. Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Somit gilt

$\det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21} \;=\; a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} \;=\; \det \mathbf{A}.$

1d.
$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) &= \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\ &\quad - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} \\ &= (a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12})(b_{11}\,b_{22} - b_{21}\,b_{12}) \;=\; \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} \end{aligned}$$

1e. Seien die Zeilen von $\mathbf{A}$ linear abhängig. Dann gibt es eine Zeile, die Vielfache einer anderen Zeile ist. Ist die erste Zeile Vielfaches der zweiten Zeile, so gilt: $a_{11} = ka_{21}$ und $a_{12} = ka_{22}$. Dann folgt: $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = ka_{21}a_{22} - ka_{22}a_{21} = 0$.

Ist die zweite Zeile Vielfaches von der ersten geht man analog vor.

2a. Reflexivität: Jeder Matrix $\mathbf{A}$ ist ähnlich zu sich selbst, denn $\mathbf{A} = \mathbf{E_n^{-1}} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{E_n}$.

Symmetrie: Sei $\mathbf{B}$ ähnlich zu $\mathbf{A}$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $\mathbf{T}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{T}$. Multipliziert man die Gleichung von links mit $\mathbf{T}$ und von rechts mit $\mathbf{T}^{-1}$, so folgt $\mathbf{A} = \mathbf{T} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{T}^{-1}$. Mit $\mathbf{S} := \mathbf{T}^{-1}$ folgt: $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{S}$, da $\left(\mathbf{S}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{S}$. Damit ist $\mathbf{A}$ auch ähnlich zu $\mathbf{B}$.

Transitivität: Sei $\mathbf{B}$ ähnlich zu $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ ähnlich zu $\mathbf{B}$. Dann gibt es invertierbare Matrizen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{T}$ mit $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{S}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{B} \circ \mathbf{T}$. Damit folgt $\mathbf{C} = \mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{T} = (\mathbf{S} \circ \mathbf{T})^{-1} \circ \mathbf{A} \circ (\mathbf{S} \circ \mathbf{T})$. Also leistet die Matrix $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$, die als Produkt invertierbarer Matrizen ebenfalls invertierbar ist, das Gewünschte.

2b. Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Dann folgt:

$\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\,a_{22} - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\,a_{12}$
$= a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 - a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2$
$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1$
$= \det \mathbf{A} \cdot x_1.$
Durch Teilen beider Seiten durch $\det A$ erhält man die gewünschte Darstellung für x_1.

Analog folgt:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = a_{11}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2\right) - a_{21}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2\right)$$
$$= a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 - a_{21}a_{11}x_1 - a_{21}a_{12}x_2$$
$$= \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x_2$$
$$= \det \mathbf{A} \cdot x_2.$$

Durch Teilen beider Seiten durch $\det A$ erhält man die gewünschte Darstellung für x_2.

3. Angenommen, es gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. In diesem Fall ist $\mathbf{A}$ invertierbar, und aus $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{0}$ folgt $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ – ein Widerspruch. Also gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$. Analog folgt $\det(\mathbf{B}) = 0$.

4. $\det \mathbf{A} = 367$, $\det \mathbf{B} = 0$
   (Da $\mathbf{B}$ identische Zeilen enthält, z. B. die erste und die letzte Zeile, ist $\det \mathbf{B} = 0$.)