Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsserie 4

Abgabe am 28.05.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

Die **vorliegende Serie** enthält eine erhöhte Zahl von Aufgaben und wird mit **150%** der Punkte der sonstigen Übungsserien bewertet (30 statt 20 Punkte). Für Ihre Bearbeitung sind (wegen des Pfingstmontags) 2 Wochen vorgesehen.

Bemerkung:
Determinanten müssen in den Serien 3 und 4 „per Hand" berechnet werden, mit Darstellung des Lösungsweges.

1. (a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen: 7 Pkt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Determinante des magischen Quadrats aus Albrecht Dürers *Melancholia*:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4 Pkt.

Hinweis: Nutzen Sie die Eigenschaft magischer Quadrate, dass die Zeilen- und Spaltensummen gleich sind, um die Matrix mithilfe von Zeilen- und Spaltenumformungen, welche Determinanten unverändert lassen, in eine Matrix umzuformen, die eine Zeile oder Spalte mit drei Nullen enthält.

2. (a) Begründen Sie, dass die Determinanten der folgenden Matrizen den Wert Null haben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ b & 3 & 1 & 4 \\ a & a & 0 & -b \\ 2+a+b & 4+a & 2 & 4+a-b \end{pmatrix}$$

4 Pkt.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: 4 Pkt.

Die Determinante der oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ ist das Produkt der Komponenten ihrer Hauptdiagonalen: $\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$.

3. (a) Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit der Gestalt $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$, wobei $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ quadratische Matrizen sind und $\mathbf{C}$ eine beliebige Matrix mit der Spaltenzahl von $\mathbf{A}_2$ und der Zeilenzahl von $\mathbf{A}_1$ sowie $\mathbf{0}$ eine Matrix ist, die nur aus Nullen besteht. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_1 \cdot \det \mathbf{A}_2.$$

5 Pkt.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix 3 Pkt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & a\sin\alpha & b\cos\alpha & ab \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -a^2\sin\alpha & b^2\cos\alpha & a^2b^2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \quad (\text{mit } \alpha, a, b \in \mathbb{R}).$$

4. Weisen Sie nach: Für beliebige Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det \mathbf{A}$. 3 Pkt.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen.

1a. $\det \mathbf{A} = -57, \quad \det \mathbf{B} = -a\,b\,c\,d, \quad \det \mathbf{C} = 216$

1b. Man nutzt zunächst aus, dass das magische Quadrat konstante Zeilensummen hat, und addieren alle übrigen Spalten zur ersten Spalte. Danach subtrahiert man die erste Zeile von allen übrigen Zeilen:

$$\begin{vmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & 3 & 2 & 13 \\ 34 & 10 & 11 & 8 \\ 34 & 6 & 7 & 12 \\ 34 & 15 & 14 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 7 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 12 & 12 & -12 \end{vmatrix} = 34 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 9 & -5 \\ 3 & 5 & -1 \\ 12 & 12 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 34 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -16 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ -24 & -48 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

denn die 1. und die 3. Zeile der letzten Matrix sind offensichtlich linear abhängig.

2a. $\det \mathbf{A} = 0$, da sich aus dem Doppelten der ersten Zeile minus der zweiten Zeile die dritte Zeile ergibt, es sich also nicht um eine reguläre Matrix handelt.

Die Summe der ersten drei Zeilen der Matrix $\mathbf{B}$ ergibt deren vierte Zeile; somit ist auch $\mathbf{B}$ nicht regulär.

2b. Induktionsanfang $(n = 1)$:

Dann hat die Matrix die Form $\mathbf{A} = a_{11}$. In diesem Fall ist $\det \mathbf{A} = a_{11}$ nach Definition der Determinante. Somit ist der Induktionsanfang erfüllt.

Induktionsschritt $(n - 1 \to n)$:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Wir gehen nach Induktionsvoraussetzung davon aus dass sich für obere $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen die Determinante als Produkt der Hauptdiagonalenelemente berechnen lässt. Laut Induktionsbehauptung ist nun zu zeigen, dass dies auch für eine beliebige $n \times n$-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ gilt. Um dies zu zeigen entwickeln wir die obige Determinante nach der ersten Spalte. Damit erhält man:

$$\det \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix ist eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, deren Determinante sich nach Induktionsvoraussetzung als Produkt der Hauptdiagonalenelemente berechnen lässt, also:

$$\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} \dots \cdot a_{nn}.$$

Damit erhält man insgesamt: $\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots \cdot a_{nn}$.

3a. Durch Zeilenumformungen (Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, Vertauschen von Zeilen) an $\mathbf{A}$ verwandelt man $\mathbf{A}_1$ in eine obere Dreiecksmatrix $\mathbf{B}_1$. Dabei bleibt $\mathbf{A}_2$ unverändert, aus $\mathbf{C}$ werde $\mathbf{C}'$. Ist k die Anzahl der ausgeführten Zeilenvertauschungen, so ist $\det \mathbf{A}_1 = (-1)^k \cdot \det \mathbf{B}_1$.

Dann wandelt man $\mathbf{A}_2$ durch Zeilenumformungen an $\mathbf{A}$ in eine obere Dreiecksmatrix $\mathbf{B}_2$ um. Dabei bleiben $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{C}'$ unverändert. Ist l die Anzahl der ausgeführten Zeilenvertauschungen, so ist $\det \mathbf{A}_2 = (-1)^l \cdot \det \mathbf{B}_2$.

Ist $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}$, so sind $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ und somit auch $\mathbf{B}$ obere Dreiecksmatrizen, es ist also $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{B}_1 \cdot \det \mathbf{B}_2$. Bei der Umwandlung von $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ wurden insgesamt $k+l$ Zeilenvertauschungen vorgenommen, also ist $\det \mathbf{A} = (-1)^{k+l} \cdot \det \mathbf{B}$. Damit folgt die Behauptung $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_1 \cdot \det \mathbf{A}_2$.

3b. Wir benutzen die Aufgabe 3a: $\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & & & \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & & * & \\ & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & a & b \\ & & & -b & a \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (a^2 + b^2)$

4. Multiplikation der ersten Zeile von $\mathbf{A}$ mit λ ergibt eine Matrix $\mathbf{A}_1$ mit $\det(\mathbf{A}_1) = \lambda \det(\mathbf{A})$ (wegen der Linearität der Determinantenfunktion in jeder Zeile). Multipliziert man nun die zweite Zeile von $\mathbf{A}_1$ mit λ, so entsteht aus demselben Grund eine Matrix $\mathbf{A}_2$ mit $\det(\mathbf{A}_2) = \lambda \det(\mathbf{A}_1) = \lambda^2 \det(\mathbf{A})$. Führt man dieses Verfahren fort und multipliziert man nacheinander alle Zeilen mit λ, so entsteht schließlich $\mathbf{A}_n$ mit $\det(\mathbf{A}_n) = \lambda \det(\mathbf{A}_{n-1}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})$. In $\mathbf{A}_n$ wurde nun jedes Element von $\mathbf{A}$ genau einmal mit λ multipliziert, also $\mathbf{A}_n = \lambda\mathbf{A}$ und somit $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda^n \det(\lambda\mathbf{A})$.