Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsserie 5

Abgabe am 04.06.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

Bemerkung:
Eigenwerte und Eigenvektoren müssen „per Hand" berechnet werden, mit Darstellung des Lösungsweges.

1. (a) Bestimmen Sie den/die Eigenwert(e) und Eigenräum(e) der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Geben Sie die algebraische(n) sowie die geometrische(n) Vielfachheit(en) des/der ermittelten Eigenwerte(s) an. 3 Pkt.

   (b) Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ $n\times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ dieselben Eigenwerte besitzen. 3 Pkt.

   Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, ob 0 ein Eigenwert von $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ ist oder nicht.

2. (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrix und zeigen Sie, dass diese diagonalisierbar ist: 4 Pkt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   Geben Sie eine invertierbare Matrix $\mathbf{S}$ an, so dass $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{S}$ Diagonalgestalt hat.

   (b) Gegeben ist ein Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert λ einer Matrix $\mathbf{A}$. Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ auch Eigenvektor von $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}$ ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert. 2 Pkt.

3. Weisen Sie nach: Jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}_n$ hat mindestens einen der Eigenwerte ± 1 und keine Eigenwerte außer ± 1. 4 Pkt.

   Hinweis: Betrachten Sie $(\mathbf{A} - \mathbf{E}_n)(\mathbf{A} + \mathbf{E}_n)$.

4. Weisen Sie nach: Eine beliebige $n\times n$-Matrix $\mathbf{A}$ und ihre Transponierte $\mathbf{A}^\top$ haben dieselben Eigenwerte und algebraischen Vielfachheiten. 2 Pkt.

   Zeigen Sie, dass auch die geometrischen Vielfachheiten übereinstimmen. 2 Pkt.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen.

1a. Charakteristisches Polynom der Matrix **A**:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 .$$

Die einzige Nullstelle von $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ ist 2, also ist 2 der einzige Eigenwert von A (mit der algebraischen Vielfachheit 2). Den Eigenraum $\mathrm{Eig}_{\mathbf{A}}(2)$ zum Eigenwert 2 erhalten wir als Kern der Matrix $(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E}_2)$

$$\mathrm{Eig}_{\mathbf{A}}(2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) .$$

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes ist also 1.

1b. Fall 1: Es ist 0 ein Eigenwert von $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ genau dann, wenn $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ nicht invertierbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn **A** oder **B** nicht invertierbar ist. Und das gilt genau dann, wenn $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ nicht invertierbar ist, wobei dies wieder gleichwertig dazu ist, dass 0 ein Eigenwert von $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ ist.

Fall 2: Jetzt sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ und $\vec{v}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ zu λ. Dann gilt: $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \vec{v} = \lambda \vec{v} \neq \mathbf{0}$, also $\mathbf{B} \circ \vec{v} \neq \mathbf{0}$. Damit ist dann $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \vec{v}) = \mathbf{B} \circ (\lambda\, \vec{v}) = \lambda\, (\mathbf{B} \circ \vec{v})$.

Also gilt: Jeder Eigenwert von $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ ist auch Eigenwert von $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$. Durch Vertauschen der Rollen von $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ erhält man dann die Behauptung.

2a. Das charakteristische Polynom von **A** ist

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 7 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 7 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(10-\lambda)\,(-4-\lambda)\,,$$

sodass **A** die drei jeweils einfachen Eigenwerte 1, 10 und -4 hat. Damit ist nun schon klar, dass **B** diagonalisierbar ist, da die geometrische Vielfachheit für jeden Eigenwert mindestens 1 ist. Wir bestimmen nun die Eigenräume zu den drei Eigenwerten:

$$\mathrm{Eig}_{\mathbf{A}}(1) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \mathrm{Eig}_{\mathbf{A}}(10) = \ker \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 0 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathrm{Eig}_{\mathbf{A}}(-4) = \ker \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Wir setzen $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mit der Matrix $\mathbf{S} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{S}\,.$$

2b. Aus $\mathbf{A}\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$ folgt

$$\mathbf{A}^2\,\vec{v} = \mathbf{A}(\lambda\,\vec{v}) = \lambda^2\,\vec{v}\,,$$

so dass also $\vec{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ^2 von $\mathbf{A}^2$ ist.

3. Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ einen Eigenwert λ hat, so existiert ein Vektor $\vec{v} \neq \mathbf{0}$ mit

$$\vec{v} = \mathbf{A}^2 \, \vec{v} = \mathbf{A} \, (\lambda \, \vec{v}) = \lambda^2 \, \vec{v} \, ,$$

sodass also $(\lambda^2 - 1) \, \vec{v} = \mathbf{0}$ gilt. Weil $\vec{v} \neq \mathbf{0}$ ist, folgt also $\lambda^2 - 1 = 0$, d. h. $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$. Damit ist gezeigt: Die Matrix $\mathbf{A}$ kann höchstens die Eigenwerte 1 oder -1 haben. Nun überlegen wir uns noch, dass $\mathbf{A}$ auch tatsächlich einen dieser Eigenwerte hat. Wegen

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}_n = (\mathbf{A} - \mathbf{E}_n) \, (\mathbf{A} + \mathbf{E}_n)$$

folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{E}_n) = 0 \text{ oder } \det(\mathbf{A} + \mathbf{E}_n) = 0 \, ,$$

sodass also 1 oder -1 auch tatsächlich ein Eigenwert ist.

4. Wegen $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \, \mathbf{E}_n) = \det\big((\mathbf{A} - \lambda \, \mathbf{E}_n)^\top\big) = \det(\mathbf{A}^\top - \lambda \, \mathbf{E}_n) = p_{\mathbf{A}^\top}(\lambda)$ haben $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^\top$ dieselben Eigenwerte mit jeweils denselben algebraischen Vielfachheiten.

   Auch die geometrischen Vielfachheiten stimmen überein: Ist nämlich λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$, so gilt für die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Eig}_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \dim \ker(\mathbf{A} - \lambda \, \mathbf{E}_n) \\ &= n - \mathrm{rg}(\mathbf{A} - \lambda \, \mathbf{E}_n) \\ &= n - \mathrm{rg}(\mathbf{A}^\top - \lambda \, \mathbf{E}_n) \\ &= \dim \ker(\mathbf{A}^\top - \lambda \, \mathbf{E}_n) \\ &= \dim \mathrm{Eig}_{\mathbf{A}^\top}(\lambda) \, .\end{aligned}$$