Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsserie 6

Abgabe am 11.06.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.

1. (a) Weisen Sie nach, dass $\mathbb{R}^2$ mit
$$\langle\,,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \left\langle \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \right\rangle = x_u\, x_v + x_u\, y_v + y_u\, x_v + 2\, y_u\, y_v$$
ein euklidischer Vektorraum ist. 4 Pkt.

   (b) Beweisen Sie, dass für beliebige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eines euklidischen Vektorraumes und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: $||\lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v}\,|| \ \leq\ |\lambda| \cdot ||\vec{u}|| + |\mu| \cdot ||\vec{v}||$. 2 Pkt.

2. (a) Beweisen Sie, dass für beliebige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eines euklidischen Vektorraumes gilt: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}\ ||\vec{u} + \vec{v}||^2 - \frac{1}{4}\ ||\vec{u} - \vec{v}||^2$. 2 Pkt.

   (b) Gegeben sind in $\mathbb{R}^3$ die Basis $B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\}$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und bezüglich dieser Basis ein Skalarprodukt durch die Gramsche Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Gramsche Matrix des so gegebenen Skalarproduktes bezüglich der Standardbasis B_0^3 und berechnen Sie das dadurch bestimmte Skalarprodukt der Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. 5 Pkt.

3. Beweisen Sie die folgende Ergänzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:
Genau dann, wenn zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eines euklidischen Vektorraumes linear abhängig sind, gilt $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$. 5 Pkt.

4. Zeigen Sie, dass die folgenden „Rechenregeln“ für Skalarprodukte falsch sind. 2 Pkt.
(i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot \vec{w} \ =\ \vec{u} \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (ii) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \ =\ \vec{u}^{\,2} \cdot\ \vec{v}^{\,2}$

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen.

1a. Es gilt für beliebige $\vec{u}=\binom{x_u}{y_u}$, $\vec{v}=\binom{x_v}{y_v}$, $\vec{w}=\binom{x_w}{y_w}$:

B1.
$$\begin{aligned}\langle \vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle &= (x_u+x_v)\,x_w+(x_u+x_v)\,y_w+(y_u+y_v)\,x_w+2\,(y_u+y_v)\,y_w\\ &= x_u\,x_w+x_u\,y_w+y_u\,x_w+2\,y_u\,y_w\\ &\quad + x_v\,x_w+x_v\,y_w+y_v\,x_w+2\,y_v\,y_w\\ &= \langle \vec{u},\vec{w}\rangle+\langle \vec{v},\vec{w}\rangle\\ \langle \lambda\vec{u},\vec{v}\rangle &= \lambda x_u\,x_v+\lambda x_u\,y_v+\lambda y_u\,x_v+2\,\lambda y_u\,y_v\\ &= \lambda\,(x_u\,x_v+x_u\,y_v+y_u\,x_v+2\,y_u\,y_v)=\lambda\,\langle \vec{u},\vec{v}\rangle\end{aligned}$$

B2.
$$\begin{aligned}\langle \vec{u},\vec{v}\rangle &= x_u\,x_v+x_u\,y_v+y_u\,x_v+2\,y_u\,y_v\\ &= x_v\,x_u+y_v\,x_u+x_v\,y_u+2\,y_v\,y_u \;=\; \langle \vec{v},\vec{u}\rangle\end{aligned}$$

B3.
$$\begin{aligned}\langle \vec{u},\vec{u}\rangle &= x_u\,x_u+x_u\,y_u+y_u\,x_u+2\,y_u\,y_u \;=\; x_u^2+2\,x_u\,y_u+2\,y_u^2\\ &= (x_u+y_u)^2+y_u^2\end{aligned}$$

Da $\langle \vec{u},\vec{u}\rangle$ die Summe zweier Quadrate reeller Zahlen ist, gilt $\langle \vec{u},\vec{u}\rangle \geq 0$ für beliebige $\vec{u}$. Damit $\langle \vec{u},\vec{u}\rangle=0$ ist, müssen (x_u+y_u) sowie y_u und damit auch x_u Null sein. Somit gilt $\langle \vec{u},\vec{u}\rangle=0$ nur, wenn $\vec{u}$ der Nullvektor ist.

Durch $\langle\,,\rangle$ ist somit eine positiv definite symmetrische Bilinearform gegeben, mit der $\mathbb{R}^2$ zu einem euklidischen Vektorraum wird.

1b. Nach der Dreiecksungleichung ist $||\lambda\,\vec{u}+\mu\vec{v}\,|| \;\leq\; ||\lambda\,\vec{u}||+||\mu\,\vec{v}||$.
Außerdem ist $||\lambda\,\vec{u}||=\sqrt{\langle \lambda\,\vec{u},\lambda\,\vec{u}\rangle}=\sqrt{\lambda^2\,\langle \vec{u},\vec{u}\rangle}=|\lambda|\cdot||\vec{u}||$ und analog $||\lambda\,\vec{v}||=|\lambda|\cdot||\vec{v}||$.
Also gilt $||\lambda\,\vec{u}+\mu\vec{v}\,|| \;\leq\; |\lambda|\cdot||\vec{u}||+|\mu|\cdot||\vec{v}||$.

2a. $\frac{1}{4}\,||\vec{u}+\vec{v}||^2-\frac{1}{4}\,||\vec{u}-\vec{v}||^2=\frac{1}{4}\,\langle(\vec{u}+\vec{v})\,,(\vec{u}+\vec{v})\rangle-\frac{1}{4}\,\langle(\vec{u}-\vec{v})\,,(\vec{u}-\vec{v})\rangle$
$=\frac{1}{4}\,(\langle \vec{u},\vec{u}\rangle+\langle \vec{v},\vec{v}\rangle+2\langle \vec{u},\vec{v}\rangle)-\frac{1}{4}\,(\langle \vec{u},\vec{u}\rangle+\langle \vec{v},\vec{v}\rangle-2\langle \vec{u},\vec{v}\rangle)=\langle \vec{u},\vec{v}\rangle$.

2b. Man schreibt zunächst die Transformationsmatrix $T^B_{E_3}=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}$ auf und erhält daraus durch Invertieren $T_B^{B_0^3}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&4&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}$. Die Gramsche Matrix des durch A gegebenen Skalarproduktes bezüglich der Standardbasis erhält man durch
$A_{(E_3)}=\left(T_B^{B_0^3}\right)^T\circ A\circ T_B^{B_0^3}$, also

$$A_{(B_0^3)}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&4&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4&1&2\\1&3&2\\2&2&5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&4&-2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-8&3\\-8&37&-20\\3&-20&12\end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich nun das Skalarprodukt der beiden gegebenen Vektoren berechnen:

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle=(\vec{x})^T\circ A_{(B_0^3)}\circ\vec{y}=(1;\,2;\,3)\circ\begin{pmatrix}4&-8&3\\-8&37&-20\\3&-20&12\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=12.$$

3. $(\Rightarrow)$ Ist $\vec{u}$ der Nullvektor, so gilt die Behauptung wegen $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle=0$ und $|\,|\vec{v}|\,|=0$ trivialerweise. Anderenfalls existiert wegen der linearen Abhängigkeit von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eine reelle Zahl λ mit $\vec{v}=\lambda\,\vec{u}$. Damit ist

$$\begin{aligned}|\langle \vec{u},\vec{v}\rangle|^2 &= \langle \vec{u},\vec{v}\rangle^2=\langle \vec{u},\vec{v}\rangle\cdot\langle \vec{u},\vec{v}\rangle=\langle \vec{u},\lambda\,\vec{u}\rangle\cdot\langle \vec{u},\lambda\,\vec{u}\rangle=\lambda\langle \vec{u},\vec{u}\rangle\cdot\lambda\langle \vec{u},\vec{u}\rangle=\langle \vec{u},\vec{u}\rangle\cdot\lambda^2\langle \vec{u},\vec{u}\rangle\\ &= \langle \vec{u},\vec{u}\rangle\cdot\langle \lambda\,\vec{u},\lambda\,\vec{u}\rangle=||\vec{u}||^2\cdot||\lambda\,\vec{u}||^2=||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2,\end{aligned}$$

also $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||$.

$(\Leftarrow)$ Wir können $\vec{u} \neq \vec{o}$ und $\vec{v} \neq \vec{o}$ voraussetzen, anderenfalls ist die lineare Abhängigkeit von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bereits klar.
Wir setzen $\lambda := \langle\vec{v},\vec{v}\rangle$ und $\mu := -\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$. Es ist $\lambda > 0$ wegen $\vec{v} \neq \vec{o}$.

Falls $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle| = ||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||$, so gilt

$0 = \lambda\left(||\vec{u}||^2\cdot||\vec{v}||^2 - \langle\vec{u}\cdot\vec{v}\rangle^2\right) = \lambda\left(\langle\vec{u},\vec{u}\rangle\cdot\langle\vec{v},\vec{v}\rangle - \langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2\right) = \lambda\left(\langle\vec{u},\vec{u}\rangle\cdot\langle\vec{v},\vec{v}\rangle - 2\langle\vec{u}\cdot\vec{v}\rangle^2 + \langle\vec{u}\cdot\vec{v}\rangle^2\right)$
$\quad = \lambda^2\,\langle\vec{u},\vec{u}\rangle + 2\lambda\mu\,\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \mu^2\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = \langle\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\ ,\ \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\rangle.$

Aus $\langle\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\ ,\ \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\rangle = 0$ folgt wegen B3 (Definition pos. def. symm. BLF) $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} = \vec{o}$;
wegen $\lambda > 0$ sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ also linear abhängig.

Bewertung: $(\Rightarrow)$: 2 Pkt.; $(\Leftarrow)$: 3 Pkt.

4. Geeignete Gegenbeispiele sind u.a.:

   (i) $\vec{u} = \binom{1}{0}, \vec{v} = \binom{1}{0}, \vec{w} = \binom{0}{1}$, also $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\cdot\vec{w} = \binom{0}{1}$ und $\vec{u}\cdot\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = \binom{0}{0}$;

   (ii) $\vec{u} = \binom{1}{0}, \vec{v} = \binom{0}{1}$, damit gilt $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2 = 0$ und $\vec{u}^{\,2}\cdot\ \vec{v}^{\,2} = 1$.