Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

**Lineare Algebra und Analytische Geometrie II**

# Übungsserie 7

Abgabe am 18.06.2018

**Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:**

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.
- **Bitte lassen Sie bei Ihren Lösungen einen ca. 4-5 cm breiten Rand auf der rechten Seite.**

1. Beweisen Sie vektoriell (mit Hilfe des Skalarproduktes), dass ein Parallelogramm genau dann ein Rechteck ist, wenn seine Diagonalen gleich lang sind. 4 Pkt.

2. Die magischen Quadrate der Kantenlänge 3 bilden einen Vektorraum (genauer: einen Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ bzw. $\mathbb{R}^9$ der Dimension 3).[1] Als eine Basis dieses Unterraums wurde

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ bzw. (in anderer Schreibweise)}$$

$$B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\} \text{ mit } \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ermittelt.}$$

Konstruieren Sie daraus eine Orthonormalbasis des Vektorraumes der magischen Quadrate der Kantenlänge 3. 6 Pkt.

3. (a) Es seien $V$ ein euklidischer Vektorraum, $B = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_n\}$ eine Orthonormalbasis von $V$ sowie $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie dass $f$ genau dann eine orthogonale Abbildung ist, wenn das Bild $B' = \{f(\vec{b}_1); \ldots; f(\vec{b}_n)\}$ der Basis $B$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{im} f$ ist. 5 Pkt.

   (b) Zeigen Sie, dass jede orthogonale Abbildung injektiv ist. 2 Pkt.

4. Weisen Sie nach, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonaler Abbildungen orthogonal zueinander sein müssen. 3 Pkt.

[1] Siehe Vorlesung Lineare Algebra I oder Filler, A.: Elementare Lineare Algebra. Heidelberg: Spektrum, 2011, S. 174f. und 197f.

## Lösungen bzw. Lösungsskizzen

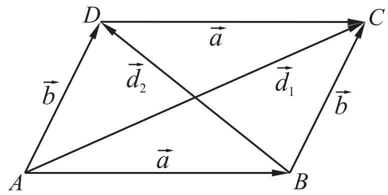
***Hinweis***: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen.

1. Es sind zwei Richtungen zu beweisen:

   - *Wenn die Diagonalen eines Parallelogramms gleich lang sind, so ist es ein Rechteck.*
     Wir betrachten ein Parallelogramm mit Bezeichnungen wie in der Abbildung. Die Diagonalenvektoren lassen sich darstellen durch $\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d_2} = -\vec{a} + \vec{b}$. Aus der Voraussetzung $||\vec{d_1}|| = ||\vec{d_2}||$ folgt $\langle \vec{d_1}, \vec{d_1} \rangle = \langle \vec{d_2}, \vec{d_2} \rangle$, also

     $$\begin{aligned} &\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle -\vec{a} + \vec{b}, -\vec{a} + \vec{b} \rangle \\ &\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \end{aligned}$$

     und somit die Behauptung $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$. Das Parallelogramm besitzt einen rechten Winkel und ist deshalb ein Rechteck.

   - *In jedem Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.*
     Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ die Behauptung $||\vec{d_1}|| = ||\vec{d_2}||$ gilt. Der Beweis erfolgt wie oben, jedoch in umgekehrter Richtung.

2. Mit der Basis $B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\}$ führen wir das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren durch und konstruieren eine Orthonormalbasis $B^0 = \{\vec{b}_1^0; \vec{b}_2^0; \vec{b}_3^0\}$.

   Schritt 1:
   Den ersten Basisvektor $\vec{b}_1^0$ erhalten wir durch Normierung von $\vec{b}_1$:

   $$\vec{b}_1^0 = \frac{1}{||\vec{b}_1||}\,\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Schritt 2:
   Der Basisvektor $\vec{b}_2^0$ soll in der linearen Hülle $\operatorname{span}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}$ liegen und zu $\vec{b}_1^0$ bzw. zu $\vec{b}_1$ orthogonal sein, d. h. $\vec{b}_2^0 = \lambda\,\vec{b}_1 + \mu\,\vec{b}_2$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ und $\langle \vec{b}_2^0, \vec{b}_1 \rangle = 0$.

   Durch Berechnung von $\langle \vec{b}_2 \vec{b}_1 \rangle$ erhält man $\langle \vec{b}_2 \vec{b}_1 \rangle = 0$ und stellt somit fest, dass $\vec{b}_2$ die Orthogonalitätsbedingung bereits erfüllt. Somit ergibt sich der Basisvektor $\vec{b}_2^0$ einfach durch Normierung von $\vec{b}_2$:

   $$\vec{b}_2^0 = \frac{1}{||\vec{b}_2||}\,\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3:
Der Basisvektor $\vec{b}_3^0$ soll zu der linearen Hülle $\operatorname{span}\left\{\vec{b}_1^0, \vec{b}_2^0, \vec{b}_3\right\}$ gehören und zu den Vektoren $\vec{b}_1^0$ und $\vec{b}_2^0$ orthogonal sein, d. h. $\vec{b}_3^0 = \lambda\,\vec{b}_1^0 + \mu\,\vec{b}_2^0 + \nu\,\vec{b}_3$ $(\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R})$ sowie $\langle \vec{b}_3^0, \vec{b}_1^0 \rangle = 0$ und $\langle \vec{b}_3^0, \vec{b}_2^0 \rangle = 0$. Zu bestimmen sind Koeffizienten $\lambda, \mu, \nu$, welche diese Bedingungen erfüllen. Dazu setzt man $\vec{b}_3^0 = \lambda\,\vec{b}_1^0 + \mu\,\vec{b}_2^0 + \nu\,\vec{b}_3$ in die beiden Orthogonalitätsbedingungen ein:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \lambda\,\vec{b}_1^0 + \mu\,\vec{b}_2^0 + \nu\,\vec{b}_3, \vec{b}_1^0 \rangle = \lambda\,\langle \vec{b}_1^0, \vec{b}_1^0 \rangle + \mu\,\langle \vec{b}_2^0, \vec{b}_1^0 \rangle + \nu\,\langle \vec{b}_3, \vec{b}_1^0 \rangle = \lambda - \tfrac{2}{\sqrt{6}}\nu \\ 0 &= \langle \lambda\,\vec{b}_1^0 + \mu\,\vec{b}_2^0 + \nu\,\vec{b}_3, \vec{b}_2^0 \rangle = \lambda\,\langle \vec{b}_1^0, \vec{b}_2^0 \rangle + \mu\,\langle \vec{b}_2^0, \vec{b}_2^0 \rangle + \nu\,\langle \vec{b}_3, \vec{b}_2^0 \rangle = \mu - \tfrac{2}{\sqrt{6}}\,\nu\,. \end{aligned}$$

Damit haben wir ein LGS, das wir nach $\lambda, \mu, \nu$ lösen. Wir erhalten eine einparametrige Lösungsmenge: $\lambda = t$, $\mu = t$, $\nu = \frac{\sqrt{6}}{2}\,t$. Setzen wir $t = 1$, also $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = \frac{\sqrt{6}}{2}$, so erhalten wir einen Vektor $\vec{b}_3'$, der die Orthogonalitätsbedingungen erfüllt und in der linearen Hülle $\operatorname{span}\left\{\vec{b}_1^0, \vec{b}_2^0, \vec{b}_3\right\}$ liegt:

$$\vec{b}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Normieren des Vektors $\vec{b}_3'$ erhalten wir $\vec{b}_3^0 = \dfrac{1}{||\vec{b}_3'||}\vec{b}_3' = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Man prüft leicht nach, dass $B^0 = \{\vec{b}_1^0; \vec{b}_2^0; \vec{b}_3^0\}$ eine Orthonormalbasis ist:

$$\begin{aligned} &\langle \vec{b}_1^0, \vec{b}_1^0 \rangle = 1, && \langle \vec{b}_2^0, \vec{b}_2^0 \rangle = 1, && \langle \vec{b}_3^0, \vec{b}_3^0 \rangle = 1, \\ &\langle \vec{b}_1^0, \vec{b}_2^0 \rangle = \langle \vec{b}_2^0, \vec{b}_1^0 \rangle = 0, && \langle \vec{b}_1^0, \vec{b}_3^0 \rangle = \langle \vec{b}_3^0, \vec{b}_1^0 \rangle = 0, && \langle \vec{b}_2^0, \vec{b}_3^0 \rangle = \langle \vec{b}_3^0, \vec{b}_2^0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

In der Matrizenscheibweise ist

$$B^0 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

3a. $(\Rightarrow)$ Dass jede orthogonale Abbildung eine Orthonormalbasis stets auf ein Orthonormalsystem abbildet, folgt unmittelbar aus der Skalarproduktstreue orthogonaler Abbildungen. Da das Bild einer Basis bei einer orthogonalen Abbildung eine linear unabhängige Vektormenge ist und $\operatorname{im} f$ die lineare Hülle der Bilder der Basisvektoren ist, ist $B' = \{f(\vec{b}_1); \ldots; f(\vec{b}_n)\}$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{im} f$.

$(\Leftarrow)$ Es sei $B = \{\vec{b}_1; \ldots; \vec{b}_n\}$ eine Orthonormalbasis von $V$ und es seien $\vec{u}, \vec{v}$ zwei beliebige Vektoren von $V$. Bezüglich der Basis $B$ lassen sie sich als Linearkombinationen $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\vec{b}_i$

und $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{b}_i$ darstellen. Da $B$ eine Orthonormalbasis ist, gilt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$. Außerdem gilt aufgrund der Linearität von $f$: $f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{b}_i)$, und $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(\vec{b}_i)$. Ist $B' = \{f(\vec{b}_1); \ldots; f(\vec{b}_n)\}$ ein Orthonormalsystem, so ist also auch $\langle f(\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$ und somit $\langle f(\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ für beliebige $\vec{u}, \vec{v} \in V$. $f$ ist also skalarproduktstreu, also eine orthogonale Abbildung.

3b. Falls eine orthogonale Abbildung $f$ nicht injektiv wäre, so wäre $\ker f \neq \{\vec{o}\}$, es würde also ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{o}$ mit $f(\vec{x}) = \vec{o}$ existieren. Somit wäre $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \neq 0$ aber $\langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{o}, \vec{o} \rangle = 0$.

4. Es seien $\lambda_1$, $\lambda_2$ zwei Eigenwerte einer orthogonalen Abbildung $f$ sowie $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ zugehörige Eigenvektoren. Da $f$ eine orthogonale Abbildung ist, gilt $\langle f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2) \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$, wir erhalten

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2) \rangle = \langle \lambda_1 \vec{v}_1, \lambda_2 \vec{v}_2 \rangle = \lambda_1 \lambda_2 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle.$$

Ist $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \neq 0$, so folgt hieraus $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, was wegen $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ nur für gleiche Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ oder $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ möglich ist. Also muss bei verschiedenen Eigenwerten $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$ sein.