Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsserie 8

Abgabe am 25.06.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.
- **Bitte lassen Sie bei Ihren Lösungen einen ca. 4-5 cm breiten Rand auf der rechten Seite.**

1. Zeigen Sie unter Nutzung der Komponentendarstellung des Vektorprodukts*, dass für beliebige Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \;\Leftrightarrow\; \vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig. 4 Pkt.

   * Der Zusammenhang zwischen dem Vektorprodukt und dem Winkel zweier Vektoren soll hier nicht verwendet werden.

2. (a) Begründen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass für das Vektorprodukt kein Assoziativgesetz der Form $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ gilt. 2 Pkt.

   (b) Begründen Sie mittels geometrischer Überlegungen:
   $|\langle \vec{u} \times \vec{v}\,,\, \vec{w} \rangle| = |\langle \vec{v} \times \vec{w}\,,\, \vec{u} \rangle| = |\langle \vec{w} \times \vec{u}\,,\, \vec{v} \rangle|$. 2 Pkt.

3. Es seien $(V, \langle\,,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und U ein Unterraum von V. Als *orthogonales Komplement* zu U bezeichnet man die Menge $U^\perp := \{\vec{v} \in V \mid \forall \vec{u} \in U : \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0\}$. Weisen Sie nach:

   (a) $U^\perp$ ist ein Unterraum von V. 2 Pkt.

   (b) Ist V endlichdimensional, so gilt $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$. 2 Pkt.
   (Sie dürfen voraussetzen, dass $U + U^\perp = V$ gilt.)

4. Beweisen Sie die folgenden Folgerungen aus der Definition des Begriffes „affiner Raum“ (Nummerierung wie in der Vorlesung):

   Es seien A ein affiner Punktraum und V der zugehörige Vektorraum. Für beliebige Punkte $P, Q, R, \in A$ und Vektoren $\vec{v} \in V$ gilt:

   2. $P + \vec{v} = Q + \vec{v} \;\Rightarrow\; P = Q\,,$ 2 Pkt.
   3. $P + \vec{v} = Q \;\Rightarrow\; P = Q + (-\vec{v})\,,$ 2 Pkt.
   6. $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \vec{o}$ bzw. $\overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{RP}\,,$ 2 Pkt.

5. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes $P = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \end{pmatrix}$ bezüglich des Koordinatensystems $K = \{O_K; \vec{b}_1; \vec{b}_2\}$ mit $O_K = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$. 2 Pkt.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen. Sie werden hier auf den Wunsch von Studierenden hin bereitgestellt, es sei dazu aber ausdrücklich gesagt, dass es sich nur zum Teil um vollständige Musterlösungen handelt. Des Weiteren ist zu sagen, dass es natürlich für viele Aufgaben auch andere als die hier skizzierten Lösungswege geben kann.

1. ($\Rightarrow$) Es gilt $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$ genau dann, wenn das LGS $\begin{array}{rrcl} \text{I} & u_2v_3 - u_3v_2 & = & 0 \\ \text{II} & u_1v_3 - u_3v_1 & = & 0 \\ \text{III} & u_2v_1 - u_1v_2 & = & 0 \end{array}$ erfüllt ist. Ist einer der beiden Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ der Nullvektor, so sind beide Vektoren trivialerweise linear abhängig. Anderenfalls muss mindestens eine der Komponenten u_1, u_2, u_3 sowie mindestens eine der Komponenten v_1, v_2, v_3 von Null verschieden sein. Trifft dies nur für zwei zusammengehörige Komponenten (wie u_1 und v_1) zu, so sind $\vec{u}, \vec{v}$ ebenfalls linear abhängig. Wir müssen also nur noch den Fall betrachten, dass es nicht zusammengehörige Komponenten von $\vec{u}, \vec{v}$ gibt, die von Null verschieden sind. O.B.d.A. sei $u_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$. Wegen III muss dann auch $u_2 \neq 0$ und $v_1 \neq 0$ sein. Damit lässt sich III folgendermaßen umstellen: $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$, wir bezeichnen diesen Quotienten mit λ, womit $v_1 = \lambda u_1$ und $v_2 = \lambda u_2$ gilt. Aus II ergibt sich wegen $u_1 \neq 0$ und $v_1 \neq 0$, dass $v_3 = u_3 = 0$ (in diesem Falle ist trivialerweise $v_3 = \lambda u_3$) oder $u_3 \neq 0$ und $v_3 \neq 0$ gilt, dann lässt sich II zu $\frac{v_3}{u_3} = \frac{v_1}{u_1}$ umformen. Auch in diesem Falle ist also $v_3 = \lambda u_3$ und somit gilt $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

   ($\Leftarrow$) Dass aus der linearen Abhängigkeit von $\vec{u}, \vec{v}$ folgt, dass ihr Vektorprodukt der Nullvektor ist, folgt unmittelbar durch Einsetzen in die Komponentendarstellung des Vektorprodukts.

2a. Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden ein Gegenbeispiel.

Es ist $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -22 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} -64 \\ 10 \\ 22 \end{pmatrix}$,

aber $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -50 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}$.

2b. Die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen einen Spat auf. Dessen Volumen V lässt sich (je nachdem in welcher Reihenfolge man die Vektoren betrachtet, welche Seitenfläche man also als Grundfläche ansieht) durch $V = |\langle \vec{u} \times \vec{v}\,, \vec{w} \rangle|$, $V = |\langle \vec{v} \times \vec{w}\,, \vec{u} \rangle|$ sowie $V = |\langle \vec{w} \times \vec{u}\,, \vec{v} \rangle|$ berechnen. Demnach müssen die Beträge der drei Spatprodukte gleich sein.

3. (a) Seien $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2 \in U^\perp$ beliebig.
   $\Rightarrow \langle \vec{v}_1, \vec{u} \rangle = 0$ und $\langle \vec{v}_2, \vec{u} \rangle = 0 \, \forall \vec{u} \in U$
   $\Rightarrow \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{u} \rangle = 0 + 0 = 0 \, \forall \vec{u} \in U$
   $\Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U^\perp$.

   Seien $\vec{v} \in U^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.
   $\Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \, \forall \vec{u} \in U$
   $\Rightarrow \langle \lambda \vec{v}, \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \, \forall \vec{u} \in U$
   $\Rightarrow \lambda \vec{u} \in U^\perp$.

   (b) Wir wenden die Dimensionsformel an. Da laut Hinweis $U + U^\perp = V$ ist, erhalten wir damit: $\dim V = \dim(U + U^\perp) = \dim(U) + \dim(U^\perp) - \dim(U \cap U^\perp)$. Wir zeigen nun noch: $U \cap U^\perp = \left\{ \vec{0} \right\}$. Damit würde die Behauptung folgen.

   Sei also $\vec{v} \in U \cap U^\perp$. Da $\vec{v} \in U^\perp$ ist, folgt $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \, \forall \vec{u} \in U$. Da $\vec{v}$ aber auch selbst in U liegt, folgt: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$. Aus der positiven Definitheit des Skalrproduktes folgt damit $\vec{v} = \vec{0}$.

4. 2. Addiert man in der Gleichung $P+\vec{v} = Q+\vec{v}$ auf beiden Seiten $-\vec{v}$, so ergibt sich nach der Def. Aff. Raum (Teil 3): $P+\vec{o} = Q+\vec{o}$. Wegen (i) folgt $P = Q$.

   3. Durch Addition von $-\vec{v}$ auf beiden Seiten der Gl. $P+\vec{v}=Q$ ergibt sich $P+\vec{o}=Q+(-\vec{v})$. Wegen Def. Aff. Raum (Teil 1) entspricht dies der Behauptung $P = Q+(-\vec{v})$.

   6. Nach Def. Aff. Raum (Teil 2) existieren eindeutig bestimmte Vektoren $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{RP}$ mit $P+\overrightarrow{PR} = R$ und $R+\overrightarrow{RP} = P$. Durch Einsetzen folgt daraus $(P+\overrightarrow{PR})+\overrightarrow{RP} = P$ und wegen Def. Aff. Raum (Teil 3): $P+(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RP}) = P$.
   Nach Definition Def. Aff. Raum (Teil 1) ist $P+\vec{o} = P$; wegen Teil 1 des hier zu beweisenden Satzes folgt die Behauptung $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RP} = \vec{o}$, die wegen der Eindeutigkeit des inversen Elements in VR gleichbedeutend mit $\overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{RP}$ ist.

5. $P\left(2; -\frac{5}{2}\right)_K$