Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsserie 9

Abgabe am 02.07.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.
- **Bitte lassen Sie bei Ihren Lösungen einen ca. 4-5 cm breiten Rand auf der rechten Seite.**

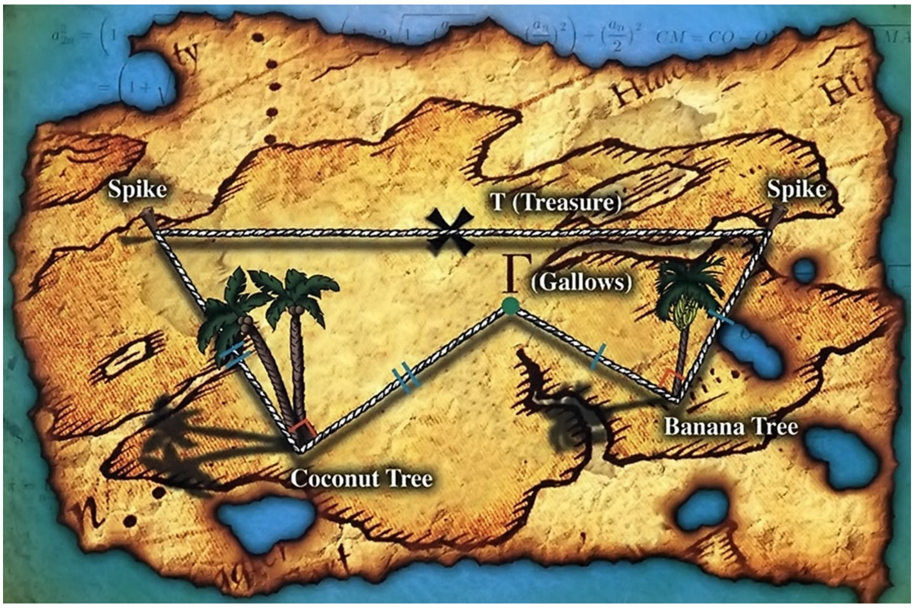
1. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 37 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 19 \\ -17 \\ -52 \end{pmatrix}$ bezüglich des folgenden Koordinatensystems von $\mathbb{R}^3$:
   $K = \{O_K; \vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\}$ mit $O_K = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. 4 Pkt.

2. Beweisen Sie den folgenden Satz: 5 Pkt.
   Ist $N = \{P \mid P = P_0 + \vec{u};\ \vec{u} \in U\}$ ein affiner Unterraum und $Q \in N$, so wird durch $M = \{P \mid P = Q + \vec{v};\ \vec{v} \in U\}$ derselbe affine Unterraum beschrieben, d. h. $M = N$.

3. Gegeben ist eine Parabel durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 11$ bezüglich des Standardkoordinatensystems von $\mathbb{R}^2$. Ermitteln Sie ein Koordinatensystem $K = \{O_K; \vec{b}_1; \vec{b}_2\}$, bezüglich dessen die Parabel durch die Gleichung $\lambda_2 = \lambda_1^2$ beschrieben wird. 3 Pkt.

4. Weisen Sie nach (mithilfe des Skalarprodukts): In jedem Parallelogramm ist die Summe der Diagonalenquadrate gleich der Summe der vier Seitenquadrate. 2 Pkt.

5. Das „Schatzinselproblem“ 6 Pkt.



Wegbeschreibung zum Schatz: *Laufe vom Galgen zum Kokosnussbaum, zähle deine Schritte. Drehe dich um 90° nach rechts und laufe so viele Schritte, wie du vom Galgen zum Kokosnussbaum gelaufen bist. Stecke einen Stock in den Boden. Geh zurück zum Galgen und laufe zum Bananenbaum, zähle* *wiederum die Schritte. Drehe dich um 90° nach links und laufe so viele Schritte, wie du vom Galgen zum Bananenbaum gelaufen bist. Stecke einen Stock in den Boden. Der Schatz befindet sich genau zwischen den beiden Stöcken.*

Der Schatzsucher findet die beiden Bäume, aber keine Spur vom Galgen.

Bestimmen Sie die Position des Schatzes bezüglich eines geeigneten Koordinatensystems.

Hinweise:

- Die Aufgabe scheint auf den ersten Blick nicht lösbar zu sein. Sie ist es aber. Überzeugen Sie sich davon, indem Sie für verschiedene (willkürlich gewählte) Positionen des Galgens die jeweilige Position des Schatzes entsprechend der Beschreibung konstruieren (mit Papier und Bleistift oder mithilfe von GeoGebra). *Dies dient Ihnen als Vorüberlegung und geht nicht in die Bewertung der Aufgabe ein*. (Sie brauchen diese Konstruktionen nicht abzugeben.)
- Entscheidend für die Lösung der Aufgabe ist die sinnvolle Wahl eines Koordinatensystems. Wählen Sie als Koordinatenursprung den Mittelpunkt der Strecke $\overline{CB}$ (Coconut–Banana) und legen Sie die x-Achse durch die beiden Bäume.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen. Sie werden hier auf den Wunsch von Studierenden hin bereitgestellt, es sei dazu aber ausdrücklich gesagt, dass es sich nur zum Teil um vollständige Musterlösungen handelt. Des Weiteren ist zu sagen, dass es natürlich für viele Aufgaben auch andere als die hier skizzierten Lösungswege geben kann.

1. $P\left(1; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)_K, \ Q\left(-2; -\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)_K$

2. Es sei $N = \{P \,|\, P = P_0 + \vec{u};\ \vec{u} \in U\}$, $Q \in N$ und $M = \{P \,|\, P = Q + \vec{v};\ \vec{v} \in U\}$. Es ist zu zeigen, dass für beliebige Punkte P gilt: $P \in N \Leftrightarrow P \in M$.

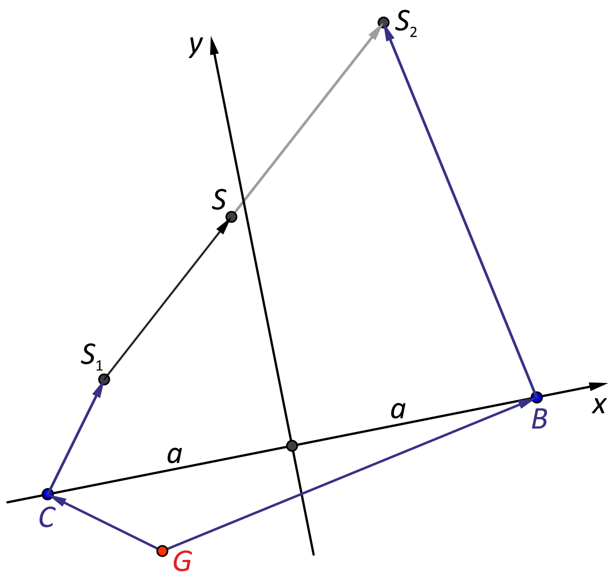
   $\Rightarrow$ Ist P ein beliebiger Punkt von N, so existiert $\vec{u} \in U$ mit $P = P_0 + \vec{u}$ und wegen $Q \in N$ existiert $\vec{w} \in U$ mit $Q = P_0 + \vec{w}$. Dann gilt
   $$P = P_0 + \vec{w} - \vec{w} + \vec{u} = Q - \vec{w} + \vec{u}.$$
   Also ist $P = Q + \vec{v}$ mit $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$. Nach der Definition des Begriffs „linearer Unterraum“ ist $\vec{v} \in U$ und somit $P \in M$.

   $\Leftarrow$ Ist $P \in M$, so existiert $\vec{v} \in U$ mit $P = Q + \vec{v}$. Wegen $Q \in N$ existiert wiederum $\vec{w} \in U$ mit $Q = P_0 + \vec{w}$ bzw. $P_0 = Q - \vec{w}$. Es gilt
   $$P = Q - \vec{w} + \vec{w} + \vec{v} = P_0 + \vec{w} + \vec{v}.$$
   Nach der Definition des Begriffs „linearer Unterraum“ ist $\vec{w} + \vec{v} \in U$ und somit $P \in N$.

3. Umformung der Gleichung der Parabel mittels quadratischer Ergänzung ergibt
   $$y = \tfrac{1}{2}\,(x+4)^2 + 3.$$
   Der Scheitelpunkt der Parabel ist der Koordinatenursprung des „neuen“ Koordinatensystems: $O = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Gleichung der Parabel in Koordinaten x', y' bezüglich des Koordinatensystems $K'_0 = \{O; \vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ ist $y' = \frac{1}{2}\,x'^2$. Man setzt $\vec{b}_1 = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \frac{1}{2}\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   Bezüglich des Koordinatensystems $K = \{O; \vec{b}_1; \vec{b}_2\}$ hat die Parabel die Gleichung $\lambda_2 = \lambda_1^2$.

4.

5. Wir legen das Koordinatensystem so fest, wie in den Hinweisen zur Aufgabe beschrieben wurde. Es sei a der Abstand der beiden Bäume vom Koordinatenursprung. Dann lassen sich die Punkte C (Coconut), B (Banana) und G (Galgen) folgendermaßen durch ihre Koordinatenpaare darstellen: $C = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$. Daraus erhält man die Vektoren
   $$\overrightarrow{GC} = \begin{pmatrix} -a - x_G \\ -y_G \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{GB} = \begin{pmatrix} a - x_G \\ -y_G \end{pmatrix}.$$



(Richtig müsste der Punkt S auf der y-Achse liegen. In der Zeichnung ist dies absichtlich falsch dargestellt, damit diese Tatsache – die ja bewiesen werden soll – nicht „aus Versehen“ vorausgesetzt wird.)

Ein Lösungsplan liegt damit auf der Hand: Die Koordinaten von S müssen in Abhängigkeit von C, B und G ausgedrückt werden, und durch geeignete Umformungen müssen die Koordinaten von G dabei „herausfallen“.

$$S = G + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CS_1} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{S_1S_2} \ \text{ bzw. } \ S = G + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BS_2} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{S_2S_1}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{GC}$ und $\overrightarrow{GB}$ sind bereits bekannt, $\overrightarrow{S_1S_2}$ lässt sich durch

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{S_1C} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BS_2} = -\overrightarrow{CS_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BS_2}$$

darstellen.

Es bleiben noch $\overrightarrow{CS_1}$ und $\overrightarrow{BS_2}$ durch $\overrightarrow{GC}$ und $\overrightarrow{GB}$ auszudrücken. Dies ist – unter Beachtung der Anweisungen „drehe dich um 90° nach rechts/links“ – mittels Grassmannscher Ergänzung $* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ möglich:

$$\overrightarrow{CS_1} = \begin{pmatrix} -y_G \\ a + x_G \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \overrightarrow{BS_2} = \begin{pmatrix} y_G \\ a - x_G \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man nun

$$\overrightarrow{S_1S_2} = -\overrightarrow{CS_1} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BS_2} = \begin{pmatrix} y_G \\ -a - x_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_G \\ a - x_G \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a + y_G \\ -x_G \end{pmatrix}$$

und somit

$$S = G + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CS_1} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - x_G \\ -y_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_G \\ a + x_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + y_G \\ -x_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix},$$

Zur Probe kann man S auch noch mittels $S = G + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BS_2} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{S_2S_1}$ berechnen, wobei sich dasselbe Resultat ergibt.