Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsserie 10

Abgabe am 09.07.2018

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Mo./Di./Mi.).
- Sie sollten die Lösungen in **Gruppen, bestehend aus (in der Regel) drei, maximal vier Studierenden**, abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.
- Achten Sie auf **gut nachvollziehbare Darstellungen der Lösungs- bzw. Beweisschritte**.
- **Bitte lassen Sie bei Ihren Lösungen einen ca. 4-5 cm breiten Rand auf der rechten Seite.**

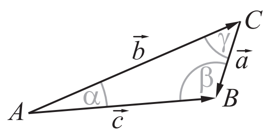
1. Klassifizieren Sie mithilfe der Dimensionsformeln für affine Unterräume alle möglichen Lagebeziehungen eines eindimensionalen affinen Unterraumes (Gerade) g und eines zweidimensionalen affinen Unterraumes ε eines vierdimensionalen affinen Raumes. 6 Pkt.

2. Weisen Sie – unter Heranziehung dafür relevanter Sätze über Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme (Vorlesung Lineare Algebra I) – nach:

   Die Lösungsmenge eines lösbaren linearen Gleichungssystems in n Variablen vom Rang r ist ein $n-r$-dimensionaler affiner Unterraum des affinen Raumes $\mathbb{R}^n$. Der zugehörige lineare Unterraum ist die Lösungsmenge des dem gegebenen LGS zugeordneten homogenen linearen Gleichungssystems. 5 Pkt.

3. Gegeben ist der affine Unterraum $N = \{P \mid P = P_0 + \vec{u};\ \vec{u} \in U\}$ von $\mathbb{R}^4$ mit $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$. Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, als dessen Lösungsmenge sich N ergibt. 3 Pkt.

4. Beweisen Sie (mithilfe des Skalarprodukts) den *Kosinussatz*: 2 Pkt.
   In einem beliebigen Dreieck (mit Bezeichnungen wie in der Skizze) gilt:
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$ und $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta$.



5. Beweisen Sie (mithilfe des Skalarprodukts) den *Sinussatz*: 4 Pkt.
   In jedem Dreieck ist der Quotient zweier Seitenlängen gleich dem Quotienten der Sinuswerte der jeweils gegenüberliegenden Innenwinkel.

Lösungen bzw. Lösungsskizzen

Hinweis: Die folgenden Lösungen bzw. Lösungsskizzen sind teilweise nur als Hinweise für die Korrektoren geschrieben und daher teilweise keine vollständigen Lösungen. Sie werden hier auf den Wunsch von Studierenden hin bereitgestellt, es sei dazu aber ausdrücklich gesagt, dass es sich nur zum Teil um vollständige Musterlösungen handelt. Des Weiteren ist zu sagen, dass es natürlich für viele Aufgaben auch andere als die hier skizzierten Lösungswege geben kann.

1. Es gilt $2 \leq \dim A\,(\varepsilon \cup g) \leq 4$, da g und ε innerhalb von A liegen und ihre affine Hülle daher maximal A selbst sein kann, zugleich aber mindestens die Ebene ε enthält. Wir untersuchen für $\varepsilon \cap g = \{\}$ und $\varepsilon \cap g \neq \{\}$ die möglichen Fälle $\dim A\,(\varepsilon \cup g) = 2, 3, 4$. Es seien U_ε und U_g die zu g bzw. ε gehörenden linearen Unterräume.
   - ε und g besitzen keinen Schnittpunkt, d. h. $\varepsilon \cap g = \{\}$.
     In diesem Falle gilt wegen $\dim \varepsilon = 2$ und $\dim g = 1$:
     $3 = \dim A(\varepsilon \cup g) + \dim\,(U_\varepsilon \cap U_g) - 1 \;\Rightarrow\; \dim A(\varepsilon \cup g) + \dim\,(U_\varepsilon \cap U_g) = 4.$

$\dim A\,(\varepsilon \cup g) = 2.$	In diesem Falle müsste $\dim\,(U_\varepsilon \cap U_g) = 2$ sein, was wegen $\dim U_g = 1$ *nicht möglich* ist.
$\dim A\,(\varepsilon \cup g) = 3.$	Es gilt $\dim\,(U_\varepsilon \cap U_g) = 1$; g ist *parallel* zu ε.
$\dim A\,(\varepsilon \cup g) = 4.$	Es gilt $\dim\,(U_\varepsilon \cap U_g) = 0$. Die Gerade g und die Ebene ε haben in diesem Falle keine gemeinsame Richtung und sind, da sie auch keinen gemeinsamen Punkt haben, *windschief*.

   - ε und g besitzen mindestens einen gemeinsamen Punkt, d. h. $\varepsilon \cap g \neq \{\}$.
     In diesem Falle gilt $\dim A(\varepsilon \cup g) + \dim\,(U_\varepsilon \cap U_g) = 3$.

$\dim A\,(\varepsilon \cup g) = 2.$	In diesem Falle ist $\dim\,(U_\varepsilon \cap U_g) = 1$, *$g$ liegt ganz in ε*.
$\dim A\,(\varepsilon \cup g) = 3.$	Es gilt $\dim\,(U_\varepsilon \cap U_g) = 0$. $U_\varepsilon \cap U_g$ besteht nur aus dem Nullvektor. Die Ebene ε und die Gerade g haben *genau einen gemeinsamen Punkt*.
$\dim A\,(\varepsilon \cup g) = 4.$	Dies ist wegen $\dim A(\varepsilon \cup g) + \dim\,(U_\varepsilon \cap U_g) = 3$ *nicht möglich*.

2. Es sei ein beliebiges lösbares LGS mit n Variablen gegeben:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

bzw. in Kurzschreibweise

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1 \dots m).$$

Da dieses LGS lösbar ist, existiert eine Lösung $L^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$.

Es sei U die Lösungsmenge des zu $(*)$ gehörenden homogenen LGS

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1 \dots m).$$

Aus dem Kapitel über Vektorräume ist bekannt, dass U ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist. Nach einem Satz über Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme ist jede Lösung L des Gleichungssystems $(*)$ als Summe der Lösung $L^{(0)}$ und einer Lösung $\vec{u} \in U$ des homogenen LGS $(**)$ darstellbar, und umgekehrt ist für jede Lösung $\vec{u} \in U$ von $(**)$ die Summe $L^{(0)} + \vec{u}$ eine Lösung des gegebenen (inhomogenen) LGS $(*)$. Die Lösungsmenge des gegebenen LGS ist also genau die Menge

$$\mathcal{L} = \left\{ L \;\middle|\; L = L^{(0)} + \vec{u};\; \vec{u} \in U \right\}.$$

Definitionsgemäß handelt es sich dabei um einen affinen Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

3. Für jeden Punkt $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in N$ muss die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. das LGS} \quad \begin{array}{rcrcl} 3\lambda & + & 4\mu & = & x_1 - 2 \\ 2\lambda & + & 5\mu & = & x_2 - 1 \\ -\lambda & + & 7\mu & = & x_3 - 3 \\ & - & 2\mu & = & x_4 - 4 \end{array}$$

erfüllt sein. Dieses LGS wird in zwei Gleichungen umgeformt, in denen nur noch x_1, x_2, x_3, x_4 auftreten. Unter Verwendung der letzten und der vorletzten Gleichung lassen sich λ und μ durch x_3, x_4 ausdrücken:

$$\lambda = -x_3 - \tfrac{7}{2}\,x_4 + 17, \quad \mu = -\tfrac{1}{2}\,x_4 + 2$$

Durch Einsetzen in die ersten beiden Gleichungen des LGS nehmen diese folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{lcl} x_1 \qquad + 3\,x_3 + \tfrac{25}{2}\,x_4 & = & 61 \\ \qquad x_2 + 2\,x_3 + \tfrac{19}{2}\,x_4 & = & 45. \end{array}$$

Der gegebene affine Unterraum ist die Lösungsmenge dieses LGS.

4. Es ist $\vec{a} = -\vec{c} + \vec{b}$ und daher (nach Definition des Winkels zweier Vektoren)

$$\vec{a}^{\,2} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} - 2\,\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = \vec{b}^{\,2} + \vec{c}^{\,2} - 2\,\|\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|\,\frac{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{\|\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|} = \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 - 2\,\|\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|\,\cos\alpha.$$

Die anderen beiden Behauptungen lassen sich völlig analog nachweisen.

5. Durch Multiplikation der Vektorgleichung $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ mit dem Höhenvektor $\vec{h}$ (siehe Abb.) ergibt sich zunächst

$$\langle \vec{a}, \vec{h} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{h} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{h} \rangle = 0,$$

(da $\vec{h} \perp \vec{c}$). Wegen der Definition des Winkels zweier Vektoren ist dies gleichbedeutend mit

$$\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{h}\| \cdot \cos\gamma_2 + \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{h}\| \cdot \cos(180^\circ - \gamma_1) = 0$$

bzw.

$$a \cdot \cos\gamma_2 - b \cdot \cos\gamma_1 = 0.$$

Wegen $\gamma_1 = 90^\circ - \alpha$ und $\gamma_2 = 90^\circ - \beta$ folgt daraus

$$a \cdot \cos(90^\circ - \beta) = b \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \quad \text{bzw.} \quad a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

und somit die Behauptung $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.