Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

2. Die reellen Zahlen

A. Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Sommersemester 2018

Internetseite zur Vorlesung:

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/ → Lehre

Die reellen Zahlen

Historische Bemerkungen

Mathematische „Hintergründe“

- Charakterisierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen
- Möglichkeiten der Konstruktion der reellen Zahlen
- (Unendliche) Dezimalzahlen

Reelle Zahlen in der Sekundarstufe I

Zugänge zu reellen (insbesondere irrationalen) Zahlen in der Sekundarstufe I

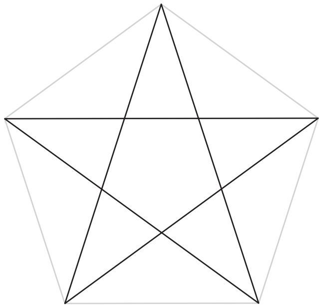
- Intervallschachtelungen
- Geometrische Zugänge

Ohne reelle Zahlen keine Analysis

Historische Bemerkungen zur Entdeckung irrationaler Zahlen

Irrationale Zahlen wurden zunächst als inkommensurable Strecken (Strecken ohne gemeinsames „Maß“, d. h. mit einem irrationalen Längenverhältnis) entdeckt.

- Pentagramm: Wahrzeichen der Pythagoreer

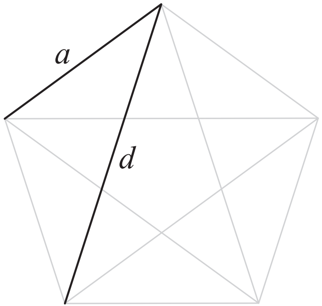


- Hippasos von Metapont (6.-5. Jh. v. Chr.): Verhältnis von Diagonalen- und Seitenlänge im regelmäßigen Fünfeck ist irrational.
- „Grundlagenkrise“ des pythagoreischen Weltbildes oder Geheimnisverrat? („Strafe der Götter“: Hippasos ertrank im Meer.)

Historische Bemerkungen zur Entdeckung irrationaler Zahlen

Irrationale Zahlen wurden zunächst als inkommensurable Strecken (Strecken ohne gemeinsames „Maß“, d. h. mit einem irrationalen Längenverhältnis) entdeckt.

- Pentagramm: Wahrzeichen der Pythagoreer



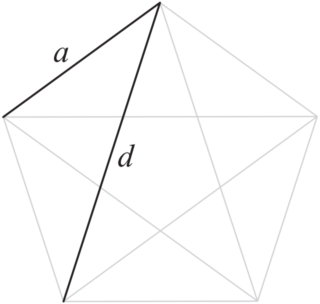
$$\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

- Hippasos von Metapont (6.-5. Jh. v. Chr.): Verhältnis von Diagonalen- und Seitenlänge im regelmäßigen Fünfeck ist irrational.
- „Grundlagenkrise“ des pythagoreischen Weltbildes oder Geheimnisverrat? („Strafe der Götter“: Hippasos ertrank im Meer.)

Historische Bemerkungen zur Entdeckung irrationaler Zahlen

Irrationale Zahlen wurden zunächst als inkommensurable Strecken (Strecken ohne gemeinsames „Maß“, d. h. mit einem irrationalen Längenverhältnis) entdeckt.

- Pentagramm: Wahrzeichen der Pythagoreer



$$\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

- Hippasos von Metapont (6.-5. Jh. v. Chr.): Verhältnis von Diagonalen- und Seitenlänge im regelmäßigen Fünfeck ist irrational.
- „Grundlagenkrise“ des pythagoreischen Weltbildes oder Geheimnisverrat? („Strafe der Götter“: Hippasos ertrank im Meer.)

Charakterisierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen

Die „Lückenlosigkeit" der reellen Zahlen kann durch sehr verschiedene (aber äquivalente) Vollständigkeitsaxiome beschrieben werden (siehe auch die Vorlesung „Algebra/Zahlentheorie")

Axiom vom Supremum (der oberen Grenze)

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (obere Grenze = kleinste obere Schranke).

Dedekindsches Schnittaxiom

Jeder Dedekindsche Schnitt wird durch ein Element von $\mathbb{R}$ erzeugt.

Dedekindscher Schnitt: Zerlegung von $\mathbb{R}$ in 2 disjunkte Teilmengen A und B mit $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$

Intervallschachtelungsaxiom

Zu jeder Intervallschachtelung $([a_i; b_i])_{i\in\mathbb{N}}$, gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq c \leq b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Cauchy'sches Konvergenzprinzip

Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$

Zusammenhang Monotonie / Beschränktheit / Konvergenz

Jede monotone beschränkte Folge konvergiert.

Charakterisierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen

Die „Lückenlosigkeit“ der reellen Zahlen kann durch sehr verschiedene (aber äquivalente) Vollständigkeitsaxiome beschrieben werden (siehe auch die Vorlesung „Algebra/Zahlentheorie“)

Axiom vom Supremum (der oberen Grenze)

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (obere Grenze = kleinste obere Schranke).

Dedekindsches Schnittaxiom

Jeder Dedekindsche Schnitt wird durch ein Element von $\mathbb{R}$ erzeugt.

Dedekindscher Schnitt: Zerlegung von $\mathbb{R}$ in 2 disjunkte Teilmengen A und B mit $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$

Intervallschachtelungsaxiom

Zu jeder Intervallschachtelung $([a_i; b_i])_{i\in\mathbb{N}}$, gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq c \leq b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Cauchy'sches Konvergenzprinzip

Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$

Zusammenhang Monotonie / Beschränktheit / Konvergenz

Jede monotone beschränkte Folge konvergiert.

Charakterisierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen

Die „Lückenlosigkeit“ der reellen Zahlen kann durch sehr verschiedene (aber äquivalente) Vollständigkeitsaxiome beschrieben werden (siehe auch die Vorlesung „Algebra/Zahlentheorie“)

Axiom vom Supremum (der oberen Grenze)

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (obere Grenze = kleinste obere Schranke).

Dedekindsches Schnittaxiom

Jeder Dedekindsche Schnitt wird durch ein Element von $\mathbb{R}$ erzeugt.

Dedekindscher Schnitt: Zerlegung von $\mathbb{R}$ in 2 disjunkte Teilmengen A und B mit $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$

Intervallschachtelungsaxiom

Zu jeder Intervallschachtelung $([a_i; b_i])_{i\in\mathbb{N}}$, gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq c \leq b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Cauchy’sches Konvergenzprinzip

Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$

Zusammenhang Monotonie / Beschränktheit / Konvergenz

Jede monotone beschränkte Folge konvergiert.

Charakterisierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen

Die „Lückenlosigkeit" der reellen Zahlen kann durch sehr verschiedene (aber äquivalente) Vollständigkeitsaxiome beschrieben werden (siehe auch die Vorlesung „Algebra/Zahlentheorie")

Axiom vom Supremum (der oberen Grenze)

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (obere Grenze = kleinste obere Schranke).

Dedekindsches Schnittaxiom

Jeder Dedekindsche Schnitt wird durch ein Element von $\mathbb{R}$ erzeugt.

Dedekindscher Schnitt: Zerlegung von $\mathbb{R}$ in 2 disjunkte Teilmengen A und B mit $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$

Intervallschachtelungsaxiom

Zu jeder Intervallschachtelung $([a_i; b_i])_{i \in \mathbb{N}}$, gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a_i \le c \le b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Cauchy'sches Konvergenzprinzip

Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$

Zusammenhang Monotonie / Beschränktheit / Konvergenz

Jede monotone beschränkte Folge konvergiert.

Charakterisierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen

Die „Lückenlosigkeit“ der reellen Zahlen kann durch sehr verschiedene (aber äquivalente) Vollständigkeitsaxiome beschrieben werden (siehe auch die Vorlesung „Algebra/Zahlentheorie“)

Axiom vom Supremum (der oberen Grenze)

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (obere Grenze = kleinste obere Schranke).

Dedekindsches Schnittaxiom

Jeder Dedekindsche Schnitt wird durch ein Element von $\mathbb{R}$ erzeugt.

Dedekindscher Schnitt: Zerlegung von $\mathbb{R}$ in 2 disjunkte Teilmengen A und B mit $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$

Intervallschachtelungsaxiom

Zu jeder Intervallschachtelung $([a_i; b_i])_{i\in\mathbb{N}}$, gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq c \leq b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Cauchy’sches Konvergenzprinzip

Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$

Zusammenhang Monotonie / Beschränktheit / Konvergenz

Jede monotone beschränkte Folge konvergiert.

Möglichkeiten der Konstruktion der reellen Zahlen

Die meisten der angegebenen Charakterisierungen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zeigen Wege auf, $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ zu konstruieren.

- $\mathbb{R}$ als die Menge von Klassen aller rationalen Intervallschachtelungen. Zwei Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]$ und $[A_n, B_n]$ gehören derselben Klasse an, wenn $a_n \leq B_m$ und $A_n \leq b_m$ für alle $n, m \in N$.
- Konstruktion der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Zwei Cauchy-Folgen gehören derselben Klasse an, wenn ihre Differenzfolge eine Nullfolge ist.[1]

Für den Unterricht:

- Weg über Intervallschachtelungen (ohne Klassenbildung)
- Weg über Cauchy-Folgen als „Hintergrundidee“ (Dezimalzahlen lassen sich als Cauchy-Folgen interpretieren)

[1] Siehe Kramer; von Pippich: *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*. Springer, 2013, S. 119ff. sowie Henn: *Elementare Geometrie und Algebra*, Vieweg, 2003, S. 182 ff.

Möglichkeiten der Konstruktion der reellen Zahlen

Die meisten der angegebenen Charakterisierungen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zeigen Wege auf, $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ zu konstruieren.

- $\mathbb{R}$ als die Menge von Klassen aller rationalen Intervallschachtelungen. Zwei Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]$ und $[A_n, B_n]$ gehören derselben Klasse an, wenn $a_n \leq B_m$ und $A_n \leq b_m$ für alle $n, m \in N$.
- Konstruktion der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Zwei Cauchy-Folgen gehören derselben Klasse an, wenn ihre Differenzfolge eine Nullfolge ist.[1]

Für den Unterricht:

- Weg über Intervallschachtelungen (ohne Klassenbildung)
- Weg über Cauchy-Folgen als „Hintergrundidee“ (Dezimalzahlen lassen sich als Cauchy-Folgen interpretieren)

[1] Siehe KRAMER; VON PIPPICH: *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*. Springer, 2013, S. 119ff. sowie HENN: *Elementare Geometrie und Algebra*, Vieweg, 2003, S. 182 ff.

Möglichkeiten der Konstruktion der reellen Zahlen

Die meisten der angegebenen Charakterisierungen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zeigen Wege auf, $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ zu konstruieren.

- $\mathbb{R}$ als die Menge von Klassen aller rationalen Intervallschachtelungen. Zwei Intervallschachtelungen $[a_n, b_n]$ und $[A_n, B_n]$ gehören derselben Klasse an, wenn $a_n \leq B_m$ und $A_n \leq b_m$ für alle $n, m \in N$.
- Konstruktion der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Zwei Cauchy-Folgen gehören derselben Klasse an, wenn ihre Differenzfolge eine Nullfolge ist.[1]

Für den Unterricht:

- Weg über Intervallschachtelungen (ohne Klassenbildung)
- Weg über Cauchy-Folgen als „Hintergrundidee“ (Dezimalzahlen lassen sich als Cauchy-Folgen interpretieren)

[1] Siehe KRAMER; VON PIPPICH: *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*. Springer, 2013, S. 119ff. sowie HENN: *Elementare Geometrie und Algebra*, Vieweg, 2003, S. 182 ff.

Dezimalzahl:

$$d = \pm\left(n + q_1\cdot 10^{-1} + q_2\cdot 10^{-2} + q_3\cdot 10^{-3} + q_4\cdot 10^{-4} + q_5\cdot 10^{-5} + \ \ldots\right)$$

$n \in \mathbb{N}$,[2] $q_k \in \mathbb{N},\ 0 \le q_k \le 9$ für $k = 1 \ldots \infty$

bzw.

$$d = \pm\left(n + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

Einer Dezimalzahl lässt sich stets eine Zahlenfolge zuordnen:

$$(d_i)_{i=1\ldots\infty} \quad \text{mit} \quad d_i = \pm\left(n + \sum_{k=1}^{i} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

- (d_i) ist eine Cauchyfolge.
- Dezimalzahlen lassen sich also Cauchyfolgen zuordnen, diese wiederum repräsentieren reelle Zahlen.

→ surjektive Abbildung von der Menge der Dezimalzahlen in die Menge der reellen Zahlen (Klassen von Cauchyfolgen).

- *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv?*

[2] Es sind hier die natürlichen Zahlen *einschließlich der Null* gemeint.

Dezimalzahl:

$$d = \pm \left(n + q_1 \cdot 10^{-1} + q_2 \cdot 10^{-2} + q_3 \cdot 10^{-3} + q_4 \cdot 10^{-4} + q_5 \cdot 10^{-5} + \ \ldots\right)$$

$n \in \mathbb{N}$,[2] $q_k \in \mathbb{N},\ 0 \leq q_k \leq 9$ für $k = 1 \ldots \infty$

bzw.

$$d = \pm \left(n + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

Einer Dezimalzahl lässt sich stets eine Zahlenfolge zuordnen:

$$(d_i)_{i=1\ldots\infty} \quad \text{mit} \quad d_i = \pm \left(n + \sum_{k=1}^{i} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

- (d_i) ist eine Cauchyfolge.
- Dezimalzahlen lassen sich also Cauchyfolgen zuordnen, diese wiederum repräsentieren reelle Zahlen.

$\rightarrow$ surjektive Abbildung von der Menge der Dezimalzahlen in die Menge der reellen Zahlen (Klassen von Cauchyfolgen).

- *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv?*

[2] Es sind hier die natürlichen Zahlen *einschließlich der Null* gemeint.

Unendliche Dezimalzahlen

Dezimalzahl:

$$d = \pm\left(n + q_1 \cdot 10^{-1} + q_2 \cdot 10^{-2} + q_3 \cdot 10^{-3} + q_4 \cdot 10^{-4} + q_5 \cdot 10^{-5} + \ \ldots\right)$$

$n \in \mathbb{N}$,[2] $q_k \in \mathbb{N},\ 0 \le q_k \le 9$ für $k = 1 \ldots \infty$

bzw.

$$d = \pm\left(n + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

Einer Dezimalzahl lässt sich stets eine Zahlenfolge zuordnen:

$$(d_i)_{i=1\ldots\infty} \quad \text{mit} \quad d_i = \pm\left(n + \sum_{k=1}^{i} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

- (d_i) ist eine Cauchyfolge.
- Dezimalzahlen lassen sich also Cauchyfolgen zuordnen, diese wiederum repräsentieren reelle Zahlen.

$\rightarrow$ surjektive Abbildung von der Menge der Dezimalzahlen in die Menge der reellen Zahlen (Klassen von Cauchyfolgen).

- *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv?*

[2] Es sind hier die natürlichen Zahlen *einschließlich der Null* gemeint.

Dezimalzahl:

$$d = \pm \left(n + q_1 \cdot 10^{-1} + q_2 \cdot 10^{-2} + q_3 \cdot 10^{-3} + q_4 \cdot 10^{-4} + q_5 \cdot 10^{-5} + \ \ldots\right)$$

$n \in \mathbb{N}$,[2] $q_k \in \mathbb{N},\ 0 \leq q_k \leq 9$ für $k = 1 \ldots \infty$

bzw.

$$d = \pm \left(n + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

Einer Dezimalzahl lässt sich stets eine Zahlenfolge zuordnen:

$$(d_i)_{i=1\ldots\infty} \quad \text{mit} \quad d_i = \pm \left(n + \sum_{k=1}^{i} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

- (d_i) ist eine Cauchyfolge.
- Dezimalzahlen lassen sich also Cauchyfolgen zuordnen, diese wiederum repräsentieren reelle Zahlen.

$\rightarrow$ surjektive Abbildung von der Menge der Dezimalzahlen in die Menge der reellen Zahlen (Klassen von Cauchyfolgen).

- *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv?*

[2] Es sind hier die natürlichen Zahlen *einschließlich der Null* gemeint.

Unendliche Dezimalzahlen

Dezimalzahl:

$$d = \pm\left(n + q_1 \cdot 10^{-1} + q_2 \cdot 10^{-2} + q_3 \cdot 10^{-3} + q_4 \cdot 10^{-4} + q_5 \cdot 10^{-5} + \ \ldots\right)$$

$n \in \mathbb{N}$,[2] $q_k \in \mathbb{N},\ 0 \le q_k \le 9$ für $k = 1 \ldots \infty$

bzw.

$$d = \pm\left(n + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

Einer Dezimalzahl lässt sich stets eine Zahlenfolge zuordnen:

$$(d_i)_{i=1\ldots\infty} \quad \text{mit} \quad d_i = \pm\left(n + \sum_{k=1}^{i} q_k \cdot 10^{-k}\right)$$

- (d_i) ist eine Cauchyfolge.
- Dezimalzahlen lassen sich also Cauchyfolgen zuordnen, diese wiederum repräsentieren reelle Zahlen.

$\rightarrow$ surjektive Abbildung von der Menge der Dezimalzahlen in die Menge der reellen Zahlen (Klassen von Cauchyfolgen).

- *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv*?

[2] Es sind hier die natürlichen Zahlen *einschließlich der Null* gemeint.

Unendliche Dezimalzahlen

- *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv?*

$$0,\overline{9} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 9 \text{ für } k = 1 \ldots \infty$$

und

$$1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot 10^{-k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 0 \text{ für } k = 1 \ldots \infty$$

sind wegen der ungleichen Koeffizienten verschiedene Dezimalzahlen.

Aber: Die Differenzfolge der beiden zugehörigen Cauchyfolgen

$(d_i)_{i=1\ldots\infty}$ und $(d'_i)_{i=1\ldots\infty}$ mit $d_i = 0 + \sum_{k=1}^{i} 9 \cdot 10^{-k}$ und $d'_i = 1 + \sum_{k=1}^{i} 0 \cdot 10^{-k}$

ist eine Nullfolge (für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein i_0 mit $d_{i_0} - d'_{i_0} < \epsilon$).

- Es besteht eine Bijektion zwischen der Menge der *echten Dezimalzahlen* (für die *nicht* ab einem bestimmten Index k_0 alle Koeffizienten q_k gleich neun sind) und der Menge der reellen Zahlen.

Zur ausführlicheren Wiederholung siehe z. B. KRAMER (2008) bzw. KRAMER; VON PIPPICH (2013).

Unendliche Dezimalzahlen

- *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv?*

$$0,\overline{9} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 9 \text{ für } k = 1 \ldots \infty$$

und

$$1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot 10^{-k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 0 \text{ für } k = 1 \ldots \infty$$

sind wegen der ungleichen Koeffizienten verschiedene Dezimalzahlen.

Aber: Die Differenzfolge der beiden zugehörigen Cauchyfolgen

$$(d_i)_{i=1\ldots\infty} \text{ und } (d'_i)_{i=1\ldots\infty} \text{ mit } d_i = 0 + \sum_{k=1}^{i} 9 \cdot 10^{-k} \text{ und } d'_i = 1 + \sum_{k=1}^{i} 0 \cdot 10^{-k}$$

ist eine Nullfolge (für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein i_0 mit $d_{i_0} - d'_{i_0} < \epsilon$).

- Es besteht eine Bijektion zwischen der Menge der *echten Dezimalzahlen* (für die *nicht* ab einem bestimmten Index k_0 alle Koeffizienten q_k gleich neun sind) und der Menge der reellen Zahlen.

Zur ausführlicheren Wiederholung siehe z. B. KRAMER (2008) bzw. KRAMER; VON PIPPICH (2013).

Unendliche Dezimalzahlen

- *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv*?

$$0,\overline{9} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 9 \text{ für } k = 1 \ldots \infty$$

und

$$1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot 10^{-k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 0 \text{ für } k = 1 \ldots \infty$$

sind wegen der ungleichen Koeffizienten verschiedene Dezimalzahlen.

Aber: Die Differenzfolge der beiden zugehörigen Cauchyfolgen

$$(d_i)_{i=1\ldots\infty} \text{ und } (d'_i)_{i=1\ldots\infty} \text{ mit } d_i = 0 + \sum_{k=1}^{i} 9 \cdot 10^{-k} \text{ und } d'_i = 1 + \sum_{k=1}^{i} 0 \cdot 10^{-k}$$

ist eine Nullfolge (für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein i_0 mit $d_{i_0} - d'_{i_0} < \epsilon$).

- Es besteht eine Bijektion zwischen der Menge der *echten Dezimalzahlen* (für die *nicht* ab einem bestimmten Index k_0 alle Koeffizienten q_k gleich neun sind) und der Menge der reellen Zahlen.

Zur ausführlicheren Wiederholung siehe z. B. KRAMER (2008) bzw. KRAMER; VON PIPPICH (2013).

Meist (fast immer) werden irrationale Zahlen im Zusammenhang mit Wurzeln eingeführt. Folgende Problemstellungen können in Klasse 9 auf $\sqrt{2}$ führen:

- Bestimme die Zahl(en), deren Quadrat 2 ist.
- Bestimme zu einem gegebenen Quadrat die Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt.
- Wie lang ist eine Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1?

Meist (fast immer) werden irrationale Zahlen im Zusammenhang mit Wurzeln eingeführt. Folgende Problemstellungen können in Klasse 9 auf $\sqrt{2}$ führen:

- Bestimme die Zahl(en), deren Quadrat 2 ist.
- Bestimme zu einem gegebenen Quadrat die Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt.
- Wie lang ist eine Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1?

Zugänge zu irrationalen Zahlen (Sekundarstufe I)

Meist (fast immer) werden irrationale Zahlen im Zusammenhang mit Wurzeln eingeführt. Folgende Problemstellungen können in Klasse 9 auf $\sqrt{2}$ führen:

- Bestimme die Zahl(en), deren Quadrat 2 ist.
- Bestimme zu einem gegebenen Quadrat die Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt.
- Wie lang ist eine Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1?

Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

(Es wird die Monotonie der quadr. Fkt. für positive Argumente vorausgesetzt.)

- $\sqrt{2}$ ist größer als 1 und kleiner als 2, denn $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$.
- Bildung der Intervallmitte – liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$ oder zwischen $1,5$ und 2 (oder ist $\sqrt{2} = 1,5$)?
- $1,5^2 > 2$, also liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$.
- Bildung der Intervallmitte: $1,25$ ... und weiter ...

Anfangswert	Endwert	Mittelwert	Mittelwert^2	Mittelwert$^2 > 2$?
1	2	1,5	2,25	ja
1	1,5	1,25	1,5625	nein
1,25	1,5	1,375	1,890625	nein
1,375	1,5	1,4375	2,06640625	ja

- Sinnvoll: Computernutzung (Tabellenkalkulation)
  $\rightarrow$ „Gefühl“ für unendliche Fortsetzbarkeit des Verfahrens

Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

(Es wird die Monotonie der quadr. Fkt. für positive Argumente vorausgesetzt.)

- $\sqrt{2}$ ist größer als 1 und kleiner als 2, denn $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$.
- Bildung der Intervallmitte – liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$ oder zwischen $1,5$ und 2 (oder ist $\sqrt{2} = 1,5$)?
- $1,5^2 > 2$, also liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$.
- Bildung der Intervallmitte: $1,25$ ... und weiter ...

Anfangswert	Endwert	Mittelwert	Mittelwert^2	Mittelwert^2 > 2?
1	2	1,5	2,25	ja
1	1,5	1,25	1,5625	nein
1,25	1,5	1,375	1,890625	nein
1,375	1,5	1,4375	2,06640625	ja

- Sinnvoll: Computernutzung (Tabellenkalkulation)
  $\rightarrow$ „Gefühl“ für unendliche Fortsetzbarkeit des Verfahrens

Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

(Es wird die Monotonie der quadr. Fkt. für positive Argumente vorausgesetzt.)

- $\sqrt{2}$ ist größer als 1 und kleiner als 2, denn $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$.
- Bildung der Intervallmitte – liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$ oder zwischen $1,5$ und 2 (oder ist $\sqrt{2} = 1,5$)?
- $1,5^2 > 2$, also liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$.
- Bildung der Intervallmitte: $1,25$ ... und weiter ...

Anfangswert	Endwert	Mittelwert	Mittelwert^2	Mittelwert^2 > 2?
1	2	1,5	2,25	ja
1	1,5	1,25	1,5625	nein
1,25	1,5	1,375	1,890625	nein
1,375	1,5	1,4375	2,06640625	ja

- Sinnvoll: Computernutzung (Tabellenkalkulation)
  $\rightarrow$ „Gefühl“ für unendliche Fortsetzbarkeit des Verfahrens

Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

(Es wird die Monotonie der quadr. Fkt. für positive Argumente vorausgesetzt.)

- $\sqrt{2}$ ist größer als 1 und kleiner als 2, denn $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$.
- Bildung der Intervallmitte – liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$ oder zwischen $1,5$ und 2 (oder ist $\sqrt{2} = 1,5$)?
- $1,5^2 > 2$, also liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$.
- Bildung der Intervallmitte: $1,25$ ... und weiter ...

Anfangswert	Endwert	Mittelwert	Mittelwert^2	Mittelwert^2 > 2?
1	2	1,5	2,25	ja
1	1,5	1,25	1,5625	nein
1,25	1,5	1,375	1,890625	nein
1,375	1,5	1,4375	2,06640625	ja

- Sinnvoll: Computernutzung (Tabellenkalkulation)
  $\rightarrow$ „Gefühl" für unendliche Fortsetzbarkeit des Verfahrens

Intervallschachtelungen

Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

(Es wird die Monotonie der quadr. Fkt. für positive Argumente vorausgesetzt.)

- $\sqrt{2}$ ist größer als 1 und kleiner als 2, denn $1^2 < 2$ und $2^2 > 2$.
- Bildung der Intervallmitte – liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$ oder zwischen $1,5$ und 2 (oder ist $\sqrt{2} = 1,5$)?
- $1,5^2 > 2$, also liegt $\sqrt{2}$ zwischen 1 und $1,5$.
- Bildung der Intervallmitte: $1,25$ ... und weiter ...

Anfangswert	Endwert	Mittelwert	Mittelwert^2	Mittelwert^2 > 2?
1	2	1,5	2,25	ja
1	1,5	1,25	1,5625	nein
1,25	1,5	1,375	1,890625	nein
1,375	1,5	1,4375	2,06640625	ja

- Sinnvoll: Computernutzung (Tabellenkalkulation)
  $\rightarrow$ „Gefühl" für unendliche Fortsetzbarkeit des Verfahrens

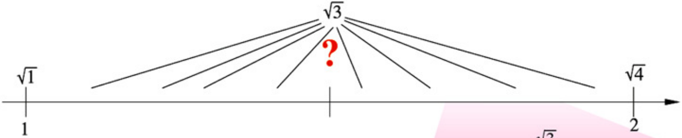
Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

- Auch wenn das Verfahren der Intervallschachtelung über sehr viele Schritte geführt wird, ist noch nicht gesichert, dass es nicht doch irgendwann abbricht.
- Noch weniger ist gesichert, dass $\sqrt{2}$ kein endlicher oder periodischer Dezimalbruch ist.
- Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist nötig (d. h. $\sqrt{2}$ lässt sich nicht durch $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ darstellen).

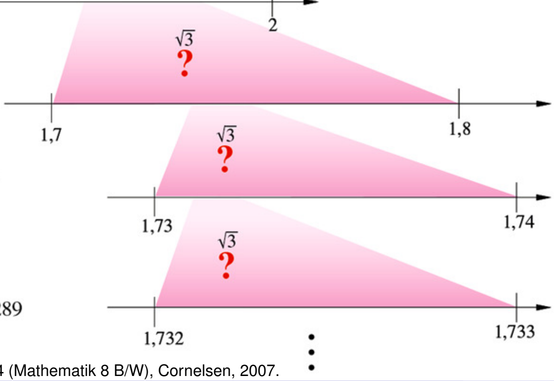
Näherungsweise Bestimmung von $\sqrt{3}$ mittels „Intervallzehntelung“

Bestimmung von $\sqrt{3}$ mithilfe dieses Verfahrens:

1. Finde zwei Zahlen, zwischen denen sich die gesuchte sicher befindet. Das sind die Ränder der ersten „Schachtel“:
$1^2 = 1 < 3 < 4 = 2^2$ bzw. $1 = \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$



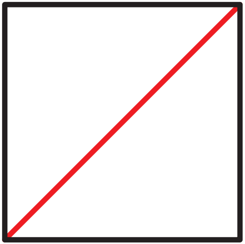
2. Wähle einen kleineren Bereich, indem du eine Nachkommastelle zu Hilfe nimmst:
$1{,}7^2 = 2{,}89 < 3 < 3{,}24 = 1{,}8^2$



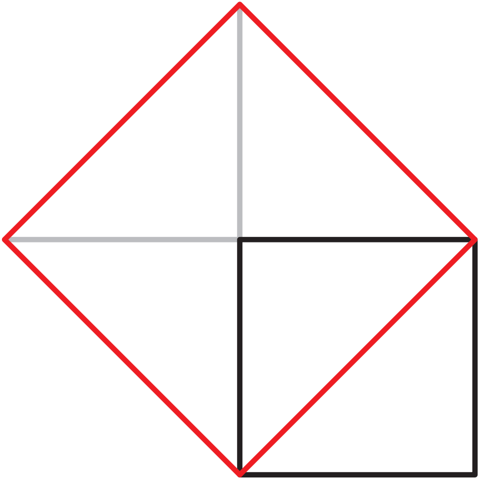
3. Verkleinere deinen Bereich immer mehr, indem du jeweils eine weitere Nachkommastelle zu Hilfe nimmst:
$1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3 < 1{,}74^2 = 3{,}0276$,
also ist $\sqrt{3} \approx 1{,}7$
$1{,}732^2 = 2{,}999824 < 3 < 1{,}733^2 = 3{,}003289$
also ist $\sqrt{3} \approx 1{,}73$
…

Aus: Fokus 4 (Mathematik 8 B/W), Cornelsen, 2007.

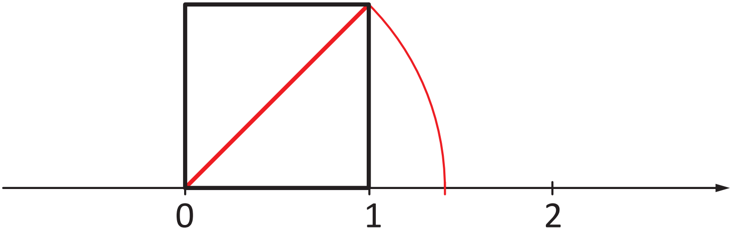
Der Zahlenteufel (Hans Magnus Enzensberger)



Der Zahlenteufel (Hans Magnus Enzensberger)



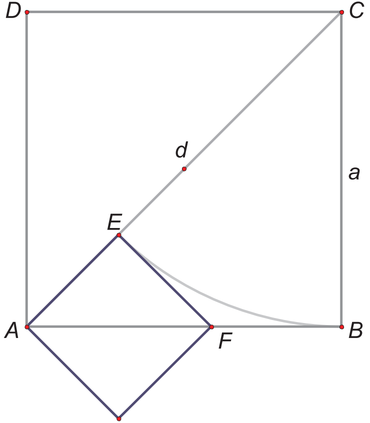
- Die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengerade zwar dicht.
- Dennoch bleiben „Löcher“.



Inkommensurabilität von Seiten- und Diagonalenlänge im Quadrat

Verfahren der „Wechselwegnahme"

Wechselwegnahme: übliche Methode, um das gemeinsame Maß zweier Strecken zu finden: man beginnt mit zwei Strecken a und b mit $a > b$, geht dann über zu b und $a - b$ und so weiter, bis irgendwann einmal die kleinere Strecke in der größeren ganzzahlig enthalten ist.



Ohne reelle Zahlen keine Analysis

oder: keine „richtige“ Analysis auf $\mathbb{Q}$

Vollständigkeit der reellen Zahlen: unverzichtbare Voraussetzung für fundamentale Sätze der Analysis und damit für die Rechtfertigung nahezu aller in der Schulanalysis (u. a. bei Kurvendiskussionen) auftretenden Schlüsse.

Nullstellensatz von Bolzano (Spezialfall des Zwischenwertsatzes): *Wechselt eine in einem abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion dort ihr Vorzeichen, so hat sie in I wenigstens eine Nullstelle.*

In $\mathbb{Q}$ gilt dieser Satz nicht.
Gegenbeispiel: $I = [1;2],\ f(x) = x^2 - 2$.

Monotoniekriterium:
Eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion mit überall auf I positiver Ableitung ist dort überall streng monoton wachsend.

In $\mathbb{Q}$ gilt auch dieser Satz nicht.
Gegenbeispiel: $I = [1;2],\ f(x) = \dfrac{1}{2 - x^2}$.

Ohne reelle Zahlen keine Analysis

oder: keine „richtige“ Analysis auf $\mathbb{Q}$

Vollständigkeit der reellen Zahlen: unverzichtbare Voraussetzung für fundamentale Sätze der Analysis und damit für die Rechtfertigung nahezu aller in der Schulanalysis (u. a. bei Kurvendiskussionen) auftretenden Schlüsse.

Nullstellensatz von Bolzano (Spezialfall des Zwischenwertsatzes):
Wechselt eine in einem abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion dort ihr Vorzeichen, so hat sie in I wenigstens eine Nullstelle.

In $\mathbb{Q}$ gilt dieser Satz nicht.
Gegenbeispiel: $I = [1; 2],\ f(x) = x^2 - 2$.

Monotoniekriterium:
Eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion mit überall auf I positiver Ableitung ist dort überall streng monoton wachsend.

In $\mathbb{Q}$ gilt auch dieser Satz nicht.
Gegenbeispiel: $I = [1; 2],\ f(x) = \dfrac{1}{2 - x^2}$.

Ohne reelle Zahlen keine Analysis

oder: keine „richtige“ Analysis auf $\mathbb{Q}$

Vollständigkeit der reellen Zahlen: unverzichtbare Voraussetzung für fundamentale Sätze der Analysis und damit für die Rechtfertigung nahezu aller in der Schulanalysis (u. a. bei Kurvendiskussionen) auftretenden Schlüsse.

Nullstellensatz von Bolzano (Spezialfall des Zwischenwertsatzes):
Wechselt eine in einem abgeschlossenen Intervall I stetige Funktion dort ihr Vorzeichen, so hat sie in I wenigstens eine Nullstelle.

In $\mathbb{Q}$ gilt dieser Satz nicht.
Gegenbeispiel: $I = [1;2],\ f(x) = x^2 - 2$.

Monotoniekriterium:
Eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion mit überall auf I positiver Ableitung ist dort überall streng monoton wachsend.

In $\mathbb{Q}$ gilt auch dieser Satz nicht.
Gegenbeispiel: $I = [1;2],\ f(x) = \dfrac{1}{2 - x^2}$.