

Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

## Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen Teil 2: Zahlenfolgen/-reihen und Grenzwerte

(Übungen am 04.05. und 07.05.)

### Geometrische Reihe

Eine geometrische Reihe  $(s_n)$  sei gegeben durch das Anfangsglied  $a_1 \in \mathbb{R}$  und den konstanten Quotienten  $q \in \mathbb{R}$ , also  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  mit  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Weisen Sie nach, dass (für  $q \neq 1$ ) gilt:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Führen Sie den Beweis mit elementaren Mitteln, die in der Schule zur Verfügung stehen; versuchen Sie, auf vollständige Induktion zu verzichten.

### Medikamentenspiegel

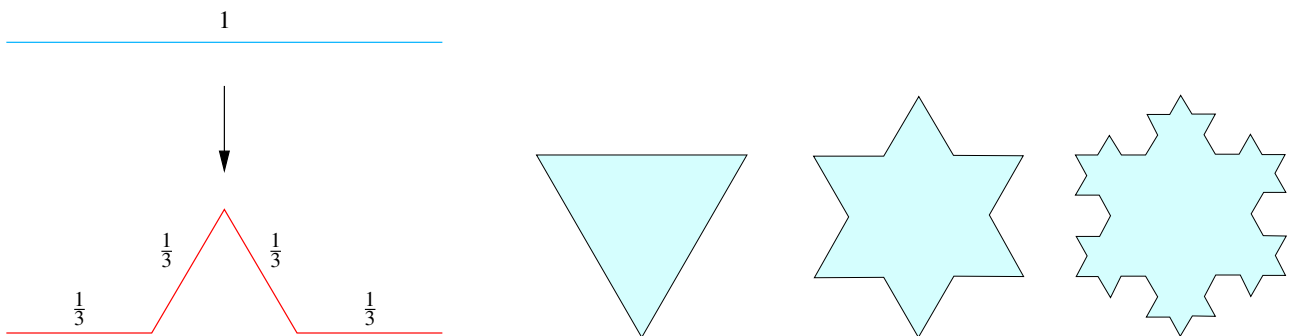
Angenommen, innerhalb von 4 Stunden werden jeweils 25% eines Medikaments vom Körper abgebaut und ausgeschieden. Die wirksame Anfangsdosis beträgt 100 mg und wird alle vier Stunden erneut gegeben. Wie entwickelt sich im Laufe der Zeit der Medikamentenspiegel im Körper?

- Geben Sie eine rekursive Bildungsvorschrift für den Medikamentenspiegel nach  $n \cdot 4$  Stunden an.
- Berechnen Sie den Medikamentenspiegel nach 1, 2, ..., 30 Zeitperioden (von jeweils 4 Stunden) und stellen Sie den Verlauf graphisch dar (mithilfe einer Tabellenkalkulations-Software).
- Entwickeln Sie eine explizite Bildungsvorschrift für den Medikamentenspiegel nach  $n \cdot 4$  Stunden und berechnen Sie den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ .

### Koch-Schneeflocke

Wir betrachten den folgenden iterativen Prozess:

Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge 1 wird jede Kante durch den in der linken Abbildung gezeigten Streckenzug ersetzt. Dieser Prozess wird nun wieder und wieder wiederholt.



Bestimmen Sie den Umfang und den Flächeninhalt der entstehenden Figur.

*Hinweis:* Überlegen Sie sich, aus wie vielen Strecken welcher Länge die Kurve nach der  $n$ -ten Iteration besteht. Wie viele Dreiecke welcher Fläche kommen dann im nächsten Schritt dazu?

*Zusatzaufgabe* (für „Python-Kenner“)

Mithilfe des Moduls TURTLE lässt sich die Koch-Schneeflocke (für einstellbare Iterationstiefen) mit wenigen Code-Zeilen sehr schön (animiert) zeichnen. Versuchen Sie es.