Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen
Teil 3: Ableitung von Funktionen/ Differentialrechnung

(Übungen am 18.05. und 14.05. sowie teilweise am 25.05. und 28.05.)

Aufgaben zum Begriff der Ableitung

1. Jemand definiert die lokale Änderungsrate einer Funktion f an einer Stelle x_0 durch den Grenzwert
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$
Ist dies gleichwertig mit der vertrauten Definition, und wie ist es geometrisch zu interpretieren?

2. Zeigen Sie: Ist f lokal um x_0 darstellbar in der Form
$$f(x_0+h) = f(x_0) + m\cdot h + r(h)$$
mit einer geeigneten Zahl m und der Restbedingung
$$|r(h)| \leq k\cdot h^2\,, \qquad k \text{ konstant,}$$
so ist f in x_0 differenzierbar und es gilt $m = f'(x_0)$.[1]
Zeigen Sie außerdem, dass umgekehrt nicht jede in x_0 differenzierbare Funktion in dieser Weise darstellbar ist. (Untersuchen Sie das Beispiel f mit $f(x) = x\sqrt{|x|}$ an der Stelle $x_0 = 0$.)

3. Stellen Sie dar, wie der Zusammenhang zwischen der Flächeninhaltsfunktion $A(r)$ und ihrer Ableitung für einen Kreis mit dem Radius r herausgearbeitet werden kann. Gehen Sie dabei nicht vorrangig auf die rein rechnerische Ableitung (mithilfe der Ableitungsregeln) ein, sondern stellen Sie auch qualitative Betrachtungen an und interpretieren Sie den Differentialquotienten geometrisch (mit Bezug auf den betrachteten Kontext).

Aufgaben zur Differentialrechnung

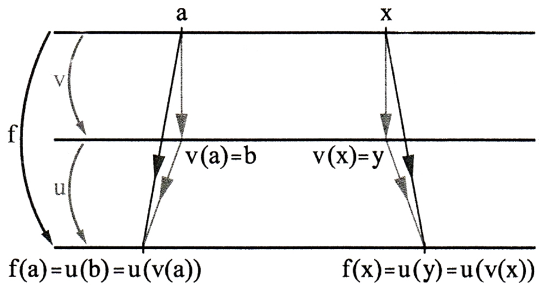
4. Bestimmen Sie den Differentialquotienten der Wurzelfunktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^+$.
Hinweis: Wenden Sie die 3. binomische Formel in geeigneter Weise an.

5. Ist eine Funktion f differenzierbar an einer Stelle x_0 und gilt $f(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion g mit $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt:
$$g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$
   a) Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Differentialquotienten.
   b) Welche Bedeutung hat der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit für den Beweis des Satzes?

[1] Zur Erläuterung: Dieser Differenzierbarkeitsbegriff eröffnet die Möglichkeit, den Fehler der lokalen Linearisierung abzuschätzen.

6. a) Formulieren Sie die Kettenregel. Achten Sie insbesondere auf die Voraussetzungen, die gegeben sein müssen.

   b) Leiten Sie mithilfe des Differentialquotienten die Kettenregel her. Orientieren Sie sich an der Grafik.



7. Ableitung von Exponentialfunktionen: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Exponentialfunktion mit $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 0$.
   (Bemerkung: Potenzen mit irrationalen Exponenten werden in der Schule i. Allg. nicht vollständig exakt definiert. Wir gehen aber davon aus, dass die Potenzgesetze auch hierfür gelten.)

   a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$.

   b) Können Sie ein a mit $f'(0) = 1$ finden?
   (Erinnern Sie sich an den Grenzübergang zur stetigen Verzinsung innerhalb eines Jahres.)