

Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

4. Ableitungen von Funktionen

A. Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik



Sommersemester 2018

Internetseite zur Vorlesung:

<http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/> → Lehre

Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen

Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge

Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem

Änderungsrate einer Funktion

Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten /

Beschleunigungen

Rechnen mit Ableitungen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

Aspekte funktionalen Denkens nach VOLLRATH¹

1. „Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man **Zusammenhänge zwischen Größen**: einer Größe ist eine andere **zugeordnet**, so dass die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen
2. Durch Funktionen erfasst man, wie **Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken**.
3. Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten **Zusammenhang als Ganzes**.“

In leichter Abwandlung der Aspekte 1 und 2 von VOLLRATH formulierte MALLE zwei Aspekte von Funktionen:²

- ▶ **Zuordnungsaspekt**: Jedem x wird genau ein $f(x)$ zugeordnet.
- ▶ **Kovariationsaspekt**: Jede Veränderung von x zieht eine bestimmte Veränderung von $f(x)$ nach sich *und umgekehrt*.

¹ VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989), S. 3-37.

² MALLE, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: *Mathematik lehren* 103, S. 8-11.

Neuverschuldung soll sinken

Regierung will Steuerplus für Sparkurs nutzen / Keine Kurskorrektur bei Reformen

Von unserem Korrespondenten
Dietrich Eickmeier

BERLIN. Die Bundesregierung will die derzeit kräftig sprudelnden Steuerquellen vor allem zum Schuldenabbau nutzen. Es müsse die erste Pflicht sein, die 2006 veranschlagte Neuverschuldung von 38,2 Milliarden Euro zu senken, sagten Kanzlerin Angela Merkel und Vizekanzler Franz Müntefering gestern nach einer Kabinettsklausur in Berlin.

Diese Summe sei eine der höchsten Neuverschuldungen in der Nachkriegsgeschichte, betonte Merkel. Bei einer Senkung würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren. Auch Finanzminister Peer Steinbrück erteilte allen Forderungen nach zusätzlichen Ausgaben sowie dem Verzicht auf die geplante Mehrwertsteuererhöhung erneut eine Absage: „Die Situation ist nach wie vor sehr ernst, trotz der erfreulichen Entwicklung.“ Der Finanzminister begründete den Sparkurs da-

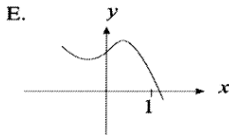
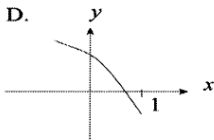
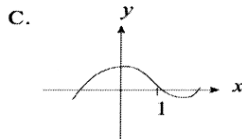
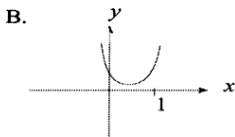
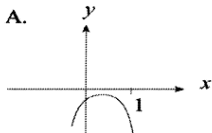
WESER  KURIER
BREMER TAGESZEITUNG

Entnommen aus:

HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. JMD 29 (2008), 3/4.

Aufgabe aus TIMMS III

Welcher der folgenden Graphen hat die nachstehenden Eigenschaften:
 $f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$ und $f''(x)$ ist immer negativ?

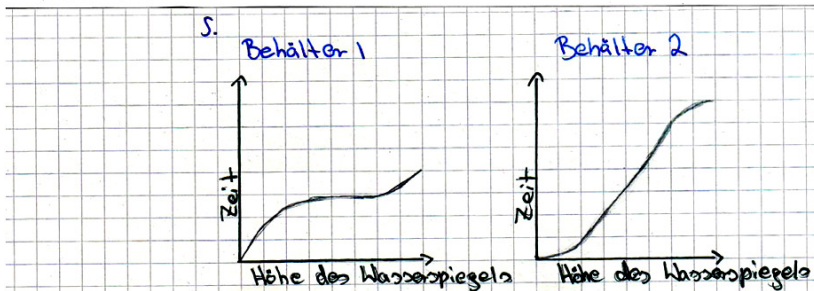
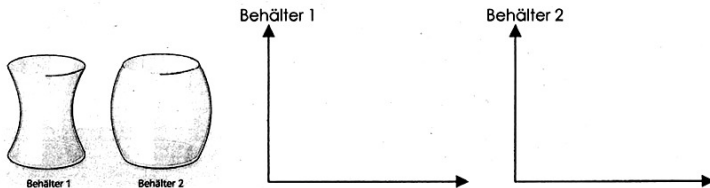


„Erfolgsquoten“: OECD: $\approx 45\%$; Deutschland: $\approx 35\%$

Qualitative Aspekte von Ableitungen

Aufgabe 5

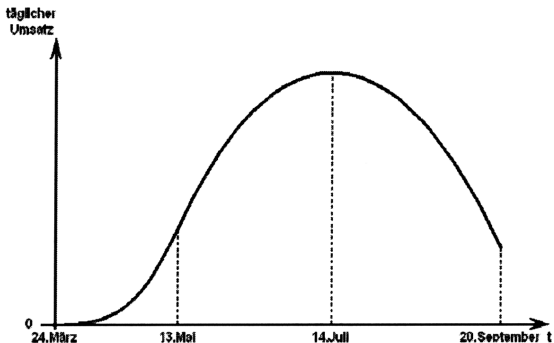
In die Behälter 1 und 2 fließt Wasser, wobei die Zuflussrate konstant ist. Skizzieren Sie für jeden Behälter einen Graphen, der die Abhängigkeit der Höhe des Wasserspiegels von der Zeit beschreibt.



Qualitative Aspekte von Ableitungen

Aufgabe Produktlebenszyklus

Ein Produkt wird am 24.3. erstmalig auf den Markt gebracht und bis zum 20.9. verkauft. Ab dem 21.9. gibt es dieses Produkt nicht mehr zu kaufen. In der obigen Graphik ist der mit diesem Produkt erbrachte tägliche Umsatz in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Am 13.5. befindet sich ein so genannter Wendepunkt. Am 14.7. befindet sich ein Hochpunkt. Unter dem Gesamtumsatz zu einem bestimmten Tag wird im Folgenden die Summe aller täglichen Umsätze vom Verkaufsbeginn an bis zu diesem Tag (einschließlich) verstanden.



Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen an, ob sie **Richtig** oder **Falsch** ist.

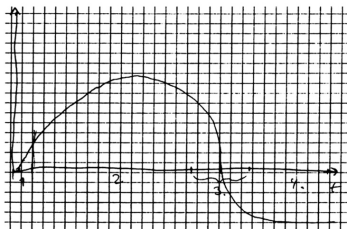
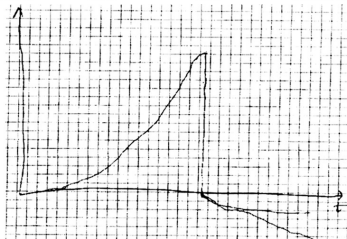
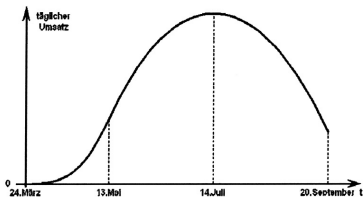
Richtig Falsch

Die Zunahme des täglichen Umsatzes sinkt jeden Tag in der Woche vom 28. Juni bis zum 04. Juli.

Die maximale Zunahme des täglichen Umsatzes wird an einem Tag in der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli erreicht.

Entnommen aus:

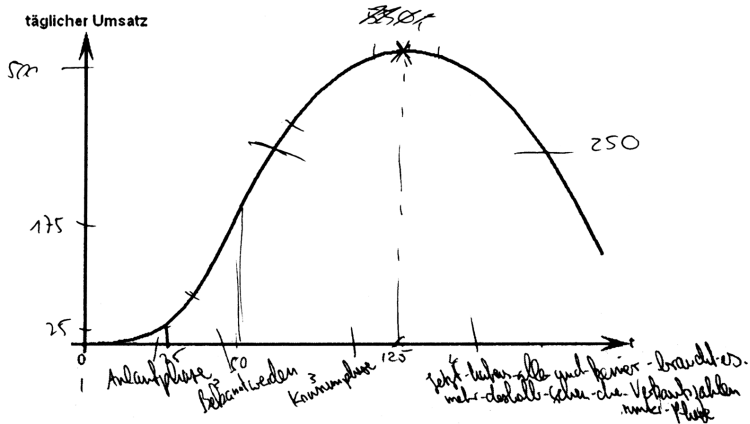
HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.



Umsatzsteigerungsgraphen von „Klaus“

Entnommen aus:
 HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.

Qualitative Aspekte von Ableitungen



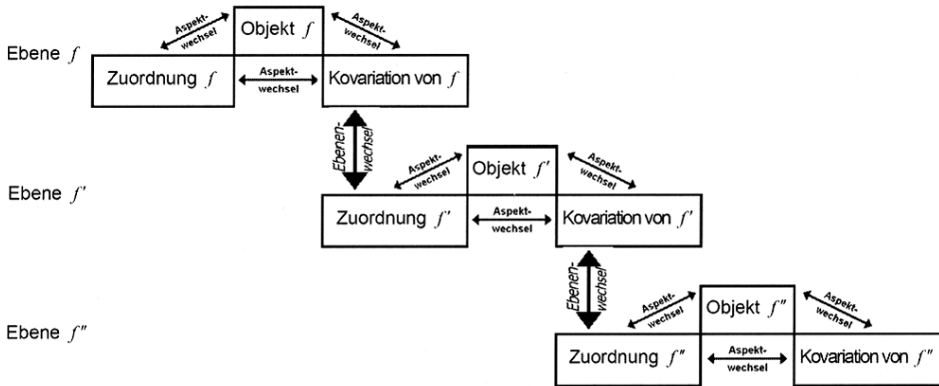
Wendepunkt und Extrempunkt selbst erfunden - Einteilung des Produktlebenszyklus in charakteristische Phasen von „Martina“ und „Henner“:
Anlaufphase — Bekanntwerden — Konsumphase — Jetzt-habens-alle-und-keiner-braucht-es-mehr-deshalb-gehen-die-Verkaufszahlen-runter-Phase

Entnommen aus:

HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. JMD 29 (2008), 3/4.

Qualitative Aspekte von Ableitungen

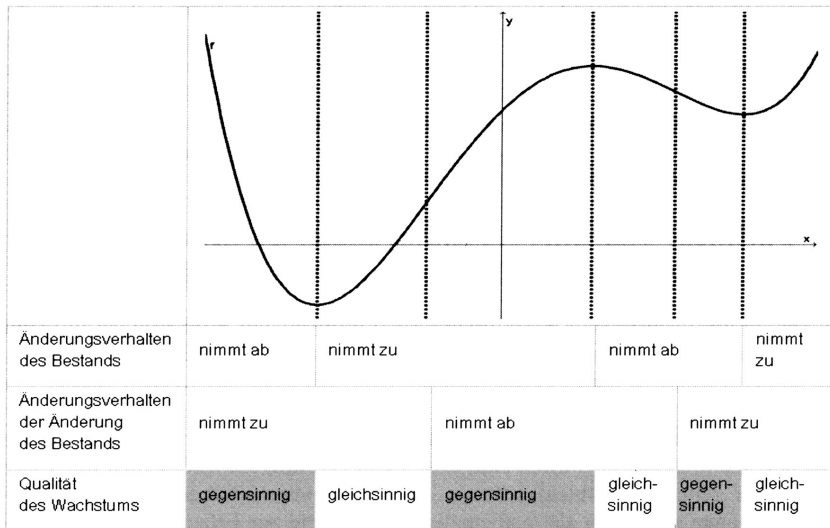
Ebenen- und Aspektwechsel als Herausforderungen der Analysis



Entnommen aus:

HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.

Qualitative Aspekte von Ableitungen



Die Qualität des Wachstums ändert sich an den Extrem- und Wendestellen

Schritte hin zum gängigen Ableitungskonzept

Schritte hin zum gängigen Ableitungskonzept

Absolute Änderung im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Durchschnittliche Änderung pro Zeiteinheit im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Momentane Änderung pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt x_0
$f(x_0 + h) - f(x_0)$	$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
konkrete Änderung des Bestands im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	durchschnittliche konkrete Änderung des Bestands pro Zeiteinheit im Zeitraum $[x_0, x_0+h]$	Momentane konkrete Änderung des Bestands pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt x_0
Ratenbildung		Grenzwertbildung

Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen

Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge

Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem

Änderungsrate einer Funktion

Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten /
Beschleunigungen

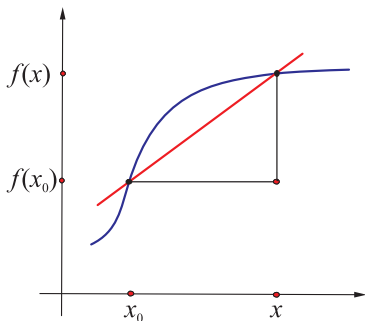
Rechnen mit Ableitungen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

- ▶ Anstieg einer Kurve in einem Punkt bzw. Tangentenproblem (LEIBNIZ, 1646-1716)
- ▶ Änderungsrate einer Funktion (NEWTON 1643-1727)
- ▶ Lineare Approximation

Tangentenproblem

Funktion f sei in einem Intervall $]a, b[$ definiert; $x_0, x \in]a, b[$.



- ▶ Anstieg der Sekante in $[x_0, x]$:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- ▶ Anstieg der Tangente in $(x_0 | f(x_0))$:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- ▶ Veranschaulichung des Grenzübergangs mithilfe des Computers

Änderungsrate einer Funktion

- ▶ Durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f in $[x_0, x]$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- ▶ Lokale (momentane) Änderungsrate von f in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- ▶ Existiert dieser Grenzwert, so ist es auch der Anstieg von f in $(x_0 | f(x_0))$

Kinematische Interpretation

- ▶ Newton: Bewegung eines Massepunktes P auf einer Geraden

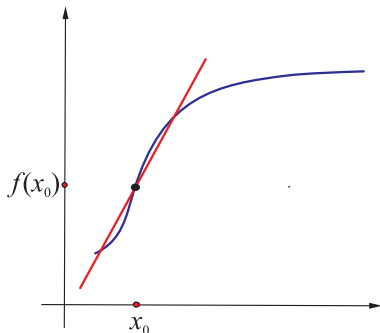
- ▶ Durchschnittsgeschwindigkeit von P : $v(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

- ▶ Momentangeschwindigkeit von P : $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

Lineare Approximation

Ziel:

„Optimale“ Approximation einer Funktion f durch eine lineare Funktion
(Mit linearen Funktionen lässt sich leichter arbeiten.)



Lineare Approximation ist ein grundlegendes Konzept in der
Mathematik.

Lineare Approximation

Geg.: Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Ges.: lineare Funktion $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- $l(x_0) = f(x_0)$ und
- $l(x) = m \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{R}$

▶ **Absoluter Approximationsfehler:** $a(x) = f(x) - l(x)$

(Falls f stetig in x_0 , so gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = 0$).

▶ **Relativer Approximationsfehler:**

$$r(x) = \frac{f(x) - l(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - m(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m$$

▶ l approximiert „optimal“, wenn $r(x)$ in der Nähe von x_0 „klein“ ist,

▶ d. h., wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$.

▶ l approximiert f in x_0 optimal, falls l die Tangente an f beschreibt.

Zusammenfassung der Zugänge zum Ableitungsbegriff

- ▶ Alle drei Ansätze führen zu dem Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- ▶ Präzisierung dieser Ideen führt zu einer Definition.

Definition: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

f heißt differenzierbar (ableitbar) in x_0 : \Leftrightarrow es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$c = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Gern wird die folgende Schreibweise verwendet:

$$c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Problem:

Um die Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle zu verstehen, ist der Grenzwert einer Funktion an einer Stelle notwendig.

Die beiden gebräuchlichsten Definitionen:

- ▶ „ ε - δ -Definition“
- ▶ „Folgendefinition“

Die „ ε - δ -Definition“ gilt als besonders schwierig, während die „Folgendefinition“ anschaulicher ist.

Rahmenlehrplan (Berlin): „Grenzwerte (von Zahlenfolgen und Funktionen) auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen.“

Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen

Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge

Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem

Änderungsrate einer Funktion

Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten /
Beschleunigungen

Rechnen mit Ableitungen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

Zugänge zum Ableitungsbegriff

- ▶ Anstieg einer Kurve in einem Punkt bzw. Tangentenproblem
- ▶ Änderungsrate einer Funktion
- ▶ Lineare Approximation

Welcher dieser Zugänge ist für die Schule am besten geeignet?

- ▶ Alle drei Zugänge haben eine gewisse Bedeutung; vor allem Anstiege / Tangenten können auch bei anderen „primären“ Zugängen der geometrischen Interpretation / Veranschaulichung dienen.
- ▶ Zugang über Änderungsraten hat einige Vorteile:
 - ▶ Anwendungsbeispiele, Anknüpfung an „Alltagserfahrungen“
 - ▶ Bezüge zu den Aspekten funktionalen Denkens
 - ▶ „Bestand und Änderung“ – tragfähiger Zugang zu Ableitung *und* Integral
 - ▶ Interpretationsmöglichkeit nicht nur der ersten, sondern auch der zweiten Ableitung (Änderung der Änderungsrate)

„Die Ableitung ist sowohl als lokale Änderungsrate als auch als Tangentensteigung zu deuten“ (Rahmenlehrplan Berlin, S. VII).

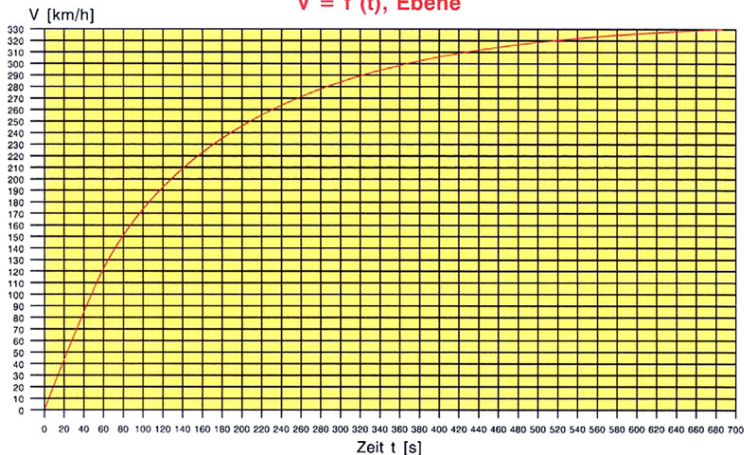
- ▶ Zugänge über **Wege / Geschwindigkeiten / Beschleunigungen** eignen sich gut für Einstiege in die Analysis.
- ▶ Siehe u. a. DANCKWERTS, R.; VOGEL, D.: *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum, 2006, S. 51ff.
- ▶ Sinnvoll: geometrische Interpretation (Sekanten \rightarrow Tangenten) simultan mit berücksichtigen.
- ▶ Der im Folgenden vorgestellte Zugang wurde in ähnlicher Form von H.-W. HENN (TU Dortmund) vorgeschlagen.

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Datenblatt ICE

BR 403 (8 MW) - Halbzug

$V = f(t)$, Ebene



Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:

Geschwindigkeit $v = f(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Konkrete Daten:

- a. 0 s bis 100 s: ICE beschleunigt von $0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $173 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- b. 100 s bis 200 s: ICE beschleunigt von $173 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $245 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- c. 200 s bis 300 s: ICE beschleunigt von $245 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf $285 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Quantifizierung der Beschleunigungsaussage:

Geschwindigkeitszunahme

von $y \frac{\text{km}}{\text{h}}$ in x s, also

a. $\frac{173 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{100 \text{ s}}$

b. $\frac{245 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 173 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{200 \text{ s} - 100 \text{ s}} = \frac{72 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{100 \text{ s}}$

c. $\frac{285 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 245 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{300 \text{ s} - 200 \text{ s}} = \frac{40 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{100 \text{ s}}$

Bemerkungen:

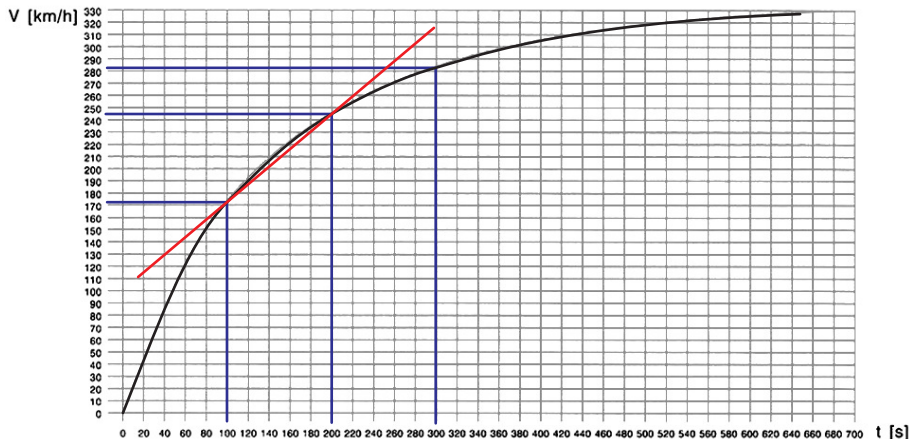
- ▶ Es handelt sich um „mittlere Beschleunigungen“ für 100 s-Zeitintervalle.

- ▶ Einheit $\frac{\frac{\text{km}}{\text{h}}}{\text{s}}$ wird üblicherweise in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ umgerechnet, z. B.:

$$\frac{173 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{100 \text{ s}} = \frac{173 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}}{100 \text{ s}} = \frac{173 \text{ m}}{360 \text{ s}^2} \approx 0,481 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

- ▶ Die mittlere Beschleunigung zwischen 100 s und 200 s lässt sich als Steigung der Geraden durch die beiden Datenpunkte deuten.



- ▶ Die mittlere Beschleunigung entspricht der Änderung der Geschwindigkeit im Zeitintervall von 100 s und 200 s .

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Eine genauere Aussage über das Beschleunigungsverhalten bei $t = 100 \text{ s}$ erhält man durch mittlere Änderungsraten wie

$$\frac{v(110 \text{ s}) - v(100 \text{ s})}{110 \text{ s} - 100 \text{ s}} \quad \text{oder} \quad \frac{v(100 \text{ s}) - v(90 \text{ s})}{100 \text{ s} - 90 \text{ s}}$$

oder allgemein

$$\frac{v(t_1) - v(100 \text{ s})}{t_1 - 100 \text{ s}} \quad \text{mit } t_1 \neq 100 \text{ s}$$

Anschaulich ist klar:

Wird das Zeitintervall kleiner, so wird die Beschleunigungsaussage genauer.

Durchschnittliche Beschleunigung im Intervall $[t; t + \Delta t]$:

$$\bar{a}(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

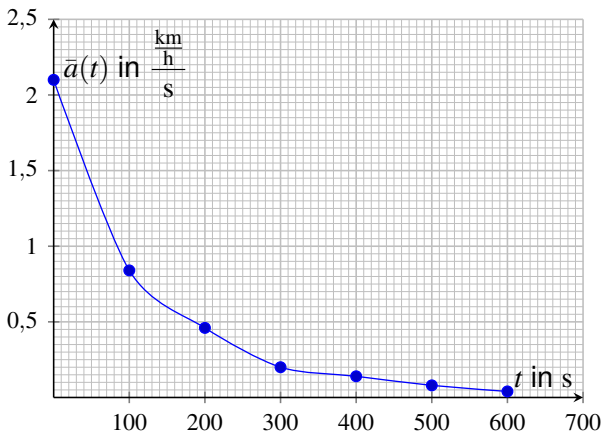
Aus dem ICE-Diagramm lassen sich einige Werte für $\Delta t = 50$ s ablesen:

t in s	$v(t)$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	$v(t + \Delta t)$ in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	$\bar{a}(t)$ in $\frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}}$
0	0	105	2,10
100	173	215	0,84
200	245	268	0,46
300	285	295	0,20
400	305	312	0,14
500	319	323	0,08
600	327	329	0,04

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Graph der Funktion $t \rightarrow \bar{a}(t)$

(für die mittleren Beschleunigungen $\bar{a}(t)$ mit $\Delta t = 50$ s)



Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Man verbessert die Aussage, indem man die **Intervalle Δt immer kleiner** wählt. Anschaulich bedeutet das:

- ▶ Übergang von der mittleren zur lokalen Beschleunigung
- ▶ Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate
- ▶ Übergang von der Steigung der Sekanten zur Steigung der Tangenten („Tangente“ in anschaulichem, nicht präzisiertem Sinne)

Mathematisch stellt sich an dieser Stelle das **Problem des Grenzwerts**:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (\Delta t \neq 0)$$

In dem Beispiel ist die Existenz des Grenzwerts *anschaulich* recht klar.

Die Existenz dieses Grenzwertes ist gleichbedeutend damit, dass der Graph „lokal linear“ ist, d. h. beim „Zoomen“ auf einen Punkt des Graphen wird der Graph zu einer Geraden.

Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen

Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge

Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem

Änderungsrate einer Funktion

Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten /

Beschleunigungen

Rechnen mit Ableitungen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

Rechnen mit Ableitungen

Ausgangspunkt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- ▶ Grenzwert kann unterschiedlich fundiert behandelt worden sein: „propädeutische Einführung“, Folgen oder „ ε - δ -Definition“
- Unterschiede GK-LK
- ▶ Was muss zur Verfügung stehen, wenn mit dem Differentialquotient gearbeitet werden soll?
- Grenzwertsätze sind unverzichtbar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (\text{Vor.: } g(x) \neq 0 \text{ in einer } \varepsilon\text{-Umg. von } x_0)$$

Ableitungen elementarer Funktionen

- ▶ f mit $f(x) = x^2$
- ▶ f mit $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
(allgemeiner: $n \in \mathbb{Z}$)
- ▶ f mit $f(x) = \sqrt{x}$
- ▶ f mit $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Q}$)
- ▶ f mit $f(x) = e^x$
(Verallgemeinerung: a^x)
- ▶ f mit $f(x) = \ln(x)$
(Verallgemeinerung: $\log_a x$)
- ▶ trigonometrische Funktionen

Ableitungsregeln

- ▶ Summen, Differenzen, konstanter Faktor
- ▶ Produktregel
- ▶ g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- ▶ Quotientenregel
- ▶ Kettenregel
- ▶ Ableitungsregel für Umkehrfunktionen

Herleitung der Produktregel

- ▶ Nahe liegende Vermutung:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$$

- ▶ Entkräftung:

$$f(x) = x, \quad g(x) = x$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2$$

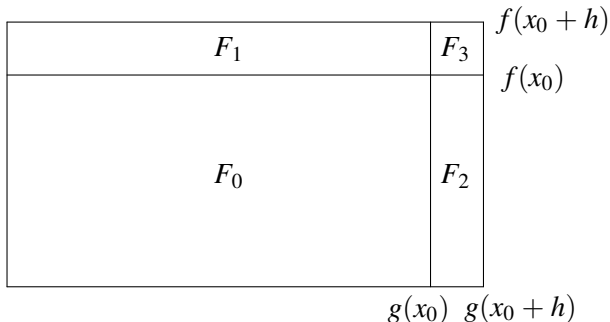
$$(f \cdot g)'(x) =$$

$$f'(x) \cdot g'(x) =$$

Rechnen mit Ableitungen

Herleitung der Produktregel – „Ikonisieren als Findungsheuristik“

- ▶ Veranschaulichung von Produkten als Flächeninhalte
- ▶ Zuordnung von Flächeninhalten F zu $f \cdot g$



Man entnimmt der Zeichnung:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x_0 + h) - (f \cdot g)(x_0) &= F(x_0 + h) - F(x_0) = F_1 + F_2 + F_3 \\ &= (f(x_0 + h) - f(x_0)) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0)) \\ &\quad + (f(x_0 + h) - f(x_0)) \cdot (g(x_0 + h) - g(x_0))\end{aligned}$$

Eine anspruchsvolle Klausuraufgabe

Ist eine Funktion f differenzierbar an einer Stelle x_0 und gilt $f(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt:

$$g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

- a) Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Differenzenquotienten.
- b) Welche Bedeutung hat der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit für den Beweis des Satzes?

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Voraussetzungen:

Additionstheoreme

(in Schulbüchern der Klasse 10 hergeleitet, aber wenig benutzt)

- ▶ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$
- ▶ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

Grenzwerte

- ▶ $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$
- ▶ $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha} = 0$

Rechnen mit Ableitungen

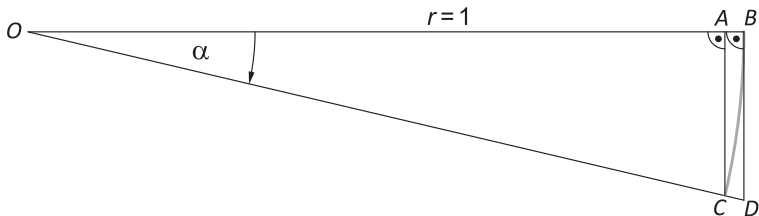
Beweisen Sie auf der Grundlage der Definition des Sinus am Einheitskreis, dass

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

gilt (wobei α im Bogenmaß gemessen wird).

Hinweise:

- ▶ Vergleichen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OAC , des von den Radien \overline{OB} und \overline{OC} begrenzten Kreissektors sowie des Dreiecks OBD .
- ▶ Drücken Sie alle drei Flächeninhalte durch α , $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ aus und formen Sie die so erhaltene Doppel-Ungleichung so um, dass Sie die Behauptung nachweisen können.
- ▶ Die Stetigkeit der Kosinusfunktion an der Stelle 0 dürfen Sie voraussetzen.



Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen

Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge

Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem

Änderungsrate einer Funktion

Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten /
Beschleunigungen

Rechnen mit Ableitungen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

(Nicht nur) theoretische Grundlage für Kurvendiskussionen

Sätze über stetige Funktionen

- ▶ Zwischenwertsatz (Spezialfall: Nullstellensatz von Bolzano)
- ▶ Satz vom Minimum und Maximum

Sätze über differenzierbare Funktionen

- ▶ Differenzierbarkeit \rightarrow Stetigkeit
- ▶ Satz von Rolle, Mittelwertsatz
- ▶ Monotoniesatz
- ▶ Kriterien für lokale Extrema und Wendepunkte