Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2018

Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen

Teil 4: Sätze über differenzierbare Funktionen, Monotonie, lokale Extrema

(Übungen am 25.05. und 28.05.)

Aufgaben zum Satz von Rolle und zum Mittelwertsatz

1. Belegen Sie durch ein Beispiel, dass man im Satz von Rolle *nicht* formulieren kann:
Es existiert *genau* ein x_0 mit $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$.

2. Es sei f eine beliebige quadratische Funktion. Zeigen Sie, dass die Sekante von f in einem beliebigen Intervall $[a; b]$ parallel zur Tangente an f an der Stelle x_0 verläuft, wobei x_0 der Mittelpunkt von $[a; b]$ ist.

3. Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen, ob es im Intervall $[a; b]$ eine Stelle x_0 gibt, an der die Tangente an f parallel zur Sekante in $[a; b]$ verläuft.
   a) $f(x) = \sqrt{x}\,, \quad [a; b] = [1; 4]$
   b) $f(x) = x^3\,, \quad [a; b] = [-3; 3]$

4. Sie wissen bereits, dass die Ableitung einer auf $\mathbb{R}$ konstanten Funktion f die Funktion f' mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.
   a) Formulieren Sie die Umkehrung dieser Aussage.
   b) Beweisen Sie diese Aussage. Wenden Sie dazu den Mittelwertsatz auf eine Funktion an, deren Ableitung überall Null ist.

Aufgaben zum Beweis des Mittelwertsatzes

1. Stellen Sie die Gleichung für die lineare Funktion g auf, deren Graph Sekante von f in $[a; b]$ ist.

2. Zeigen Sie, dass die Hilfsfunktion H mit $H(x) = f(x) - g(x)$ die Voraussetzungen des Satzes von Rolle erfüllt.

3. Nach dem Satz von Rolle existiert dann ein $x_0 \in\ ]a; b[$ mit $H'(x_0) = 0$. Zeigen Sie, dass mit dieser Zahl x_0 die Behauptung des Mittelwertsatzes für f erfüllt ist.

4. Veranschaulichen Sie die Betrachtung durch Skizzieren der Funktionen f, g und H in einem Intervall $[a; b]$.

Aufgaben zum Zusammenhang von Monotonie und Ableitung

Eine Funktion f sei in einem Intervall $[a; b]$ streng monoton wachsend und an einer Stelle $x_0 \in [a; b]$ differenzierbar.
(x_n) sei eine beliebige gegen x_0 konvergierende Folge mit $x_n \neq x_0$, $x_n \in [a; b]$ für alle n.

1. Begründen Sie: Für alle n gilt $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} > 0$.

2. Welche Folgerung erhalten Sie für den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$?

3. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass die Folgerung $f'(xo) > 0$ falsch ist.

Übersicht: Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

Sätze über stetige Funktionen

SATZ 1 (Nullstellensatz) f sei eine Funktion, $[a;b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Ist f stetig in $[a;b]$ und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichnen, so hat f im Intervall $[a;b]$ wenigstens eine Nullstelle.

SATZ 2 (Zwischenwertsatz) f sei eine Funktion, $[a;b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Ist f stetig in $[a;b]$ und $f(a) \neq f(b)$, so nimmt f im Intervall $[a;b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens einmal an.

SATZ 3 (Satz vom Maximum und Minimum)
f sei eine Funktion, $[a;b]$ ein abgeschlossenes Intervall.
Ist f stetig in $[a;b]$, so hat f in $[a;b]$ ein Maximum und ein Minimum.

Aus: Schulz, W.; Stoye, W.: Mathematik Sekundarstufe II, Analysis Leistungskurs. Volk und Wissen, Berlin 1997.

Sätze über differenzierbare Funktionen

SATZ 1 (Satz von Rolle) Es sei f eine im abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetige und im offenen Intervall $(a;b)$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b) = 0$.

Dann existiert eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ mit der Eigenschaft $f'(\xi) = 0$.

SATZ 2 (Mittelwertsatz) Es sei f eine im abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetige und im offenen Intervall $(a;b)$ differenzierbare Funktion.

Dann existiert eine Zahl ξ mit $a < \xi < b$ mit der Eigenschaft $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

SATZ 3 (Monotoniesatz) f sei eine in einem Intervall I differenzierbare Funktion.
Dann gilt: a) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so wächst f in I streng monoton.
b) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so fällt f in I streng monoton.

Aus: Schulz, W.; Stoye, W.: Mathematik Sekundarstufe II, Analysis Leistungskurs. Volk und Wissen, Berlin 1997.

Kriterien für das Vorliegen lokaler Extrema

Satz 8.2 (Notwendige Bedingung für Extrema)

Die Funktion f sei im Intervall I differenzierbar und die Zahl a im Innern des Intervalls sei eine Extremstelle. Dann gilt $f'(a) = 0$.

Satz 8.3 (Hinreichendes Kriterium: Vorzeichenwechsel)

Es sei f in einer Umgebung von a differenzierbar und es gelte $f'(a) = 0$. Wenn in dieser Umgebung $f'(x) > 0$ für $x < a$ und $f'(x) < 0$ für $x > a$ gilt (Vorzeichenwechsel der Ableitung von plus nach minus), dann ist a eine isolierte Maximumstelle von f. Die analoge Aussage mit „Vorzeichenwechsel von minus nach plus" identifiziert eine isolierte Minimumstelle.

Satz 8.4 (Hinreichendes Kriterium mit zweiter Ableitung)

Es sei f in einer Umgebung von a zweimal differenzierbar. Weiter seien $f'(a) = 0$ und $f''(a) \neq 0$. Dann ist a eine isolierte Extremstelle. Genauer ist a eine isolierte Maximumstelle, falls $f''(a) < 0$, und eine isolierte Minimumstelle, falls $f''(a) > 0$.

Aus: Büchter, A.; Henn, H.-W.: Elementare Analysis. Spektrum, Heidelberg 2010.