

Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

## Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen Teil 7: Affine und metrische Geometrie von Geraden und Ebenen

(Übungen am 06./09.07.2018)

### 1. Lagebeziehungen

In einer Abituraufgabe aus dem Jahr 2012 heißt es:

Ein Raubvogel befindet sich ... im Punkt  $P_0(3260 | -1860 | 830)$  und eine Sekunde später in  $P_1(3248 | -1848 | 829)$ . Im selben Zeitraum fliegt ein Singvogel geradlinig gleichförmig im morgendlichen Frühnebel von  $Q_0(800 | -600 | 200)$  nach  $Q_1(796 | -592 | 201)$ ,  $1 \text{ LE} = 1 \text{ m}$ .

... Zeigen Sie, dass die Fluggeraden windschief zueinander verlaufen, indem Sie die lineare Unabhängigkeit der Richtungsvektoren nachweisen und den Abstand der beiden Geraden berechnen.

- Bewerten Sie Sinn/Unsinn des gegebenen Lösungshinweises.
- Lösen Sie dazu die Aufgabe mit dem gegebenen Lösungshinweis.
- Lösen Sie die Aufgabe auf rein affine Weise ohne Abstandsberechnung.

### 2. Abstandsberechnungen

Lösen Sie die folgenden Aufgaben unter Hauptaugenmerk auf die Lösungsansätze und -wege. Überlegen Sie insbesondere, was an Faktenwissen erforderlich ist, um die Aufgaben zu lösen. Versuchen Sie, mit so wenig Faktenwissen (Formeln, Kalküle) wie möglich auszukommen und statt dessen anschaulich-inhaltliche Überlegungen anzustellen. Vergleichen Sie weiterhin Umfang und Schwierigkeitsgrad der Lösungen *ohne und mit Nutzung des Vektorprodukts* (sofern dieses sinnvoll genutzt werden kann).

1. Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $Q(4; 1; -1)$  von der Ebene  $\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
2. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $Q(12; -3; 13)$  von der Ebene  $\varepsilon$  mit der Koordinatengleichung  $-5x - 8y + 2z = 32$ .
3. Bestimmen Sie den Abstand der zueinander parallelen Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ .
  - a)  $\varepsilon_1: \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon_2: \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 14 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$
  - b)  $\varepsilon_1: -3x - 4y + 5z = -20$ ,  $\varepsilon_2: 4,5x + 6y - 7,5z = 15$
4. Zeigen Sie, dass die Gerade  $g: \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$  zu der Ebene  $\varepsilon: x + y + z = -68$  parallel ist und bestimmen Sie den Abstand von  $g$  zu  $\varepsilon$ .
5. Überprüfen Sie, ob die Geraden  $g$  und  $h$  parallel oder windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.
  - a)  $g: \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
  - b)  $g: \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $h: \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ergebnisse (zur Kontrolle):

1.  $d(Q, \varepsilon) = \frac{18}{\sqrt{26}} \approx 3,530$ ; 2.  $d(Q, \varepsilon) = \frac{42}{\sqrt{93}} \approx 4,355$ ; 3. a)  $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{7}{11}$ ; b)  $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sqrt{2}$ ; 4.  $d(g, \varepsilon) = \frac{68}{\sqrt{3}} \approx 39,26$  5. a) parallel,  $d(g, h) = 3$ ; b) windschief,  $d(g, h) = 4$