Mathematische Schülergesellschaft „Leonhard Euler“
Zirkel 10a (Schuljahr 2020/21) / 11a (Schuljahr 2021/22)
Zirkelleiter: A. Filler

Komplexe Zahlen – Wiederholung/Überblick, Teil 1

Definition: Eine Zahl i mit $\mathrm{i}^2 = 1$ wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet.

Definition: Eine Zahl der Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $\mathrm{i}^2 = 1$ wird als *komplexe Zahl* bezeichnet; $\mathrm{Re}(z) := a$ heißt *Realteil*, $\mathrm{Im}(z) := b$ *Imaginärteil* von z.
Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit **C** bezeichnet: $\mathbf{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbf{R}\}$.

Satz: Die Darstellung komplexer Zahlen in der Form $z = a + b\mathrm{i}$ ist eindeutig, gilt also $a_1 + b_1\mathrm{i} = a_2 + b_2\mathrm{i}$, so ist $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.

Definition: Die Addition und die Multiplikation in **C** werden folgendermaßen definiert:

- $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1\mathrm{i}) + (a_2 + b_2\mathrm{i}) := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,\mathrm{i}$,
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1\mathrm{i}) \cdot (a_2 + b_2\mathrm{i}) := (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\,\mathrm{i}$.

Satz: In den komplexen Zahlen gelten folgende Rechengesetze ($\mathbf{C}^* = \mathrm{C}\setminus\{0\}$):

- Assoziativität der Add.: Für beliebige $z_1, z_2, z_3 \in$ **C** gilt $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
- Kommutativität der Add.: Für beliebige $z_1, z_2 \in$ **C** gilt $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- Assoziativität der Mult.: Für beliebige $z_1, z_2, z_3 \in$ **C*** gilt $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
- Kommutativität der Mult.: Für beliebige $z_1, z_2 \in$ **C*** gilt $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
- Distributivgesetz: Für beliebige $z_1, z_2, z_3 \in$ **C** gilt $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

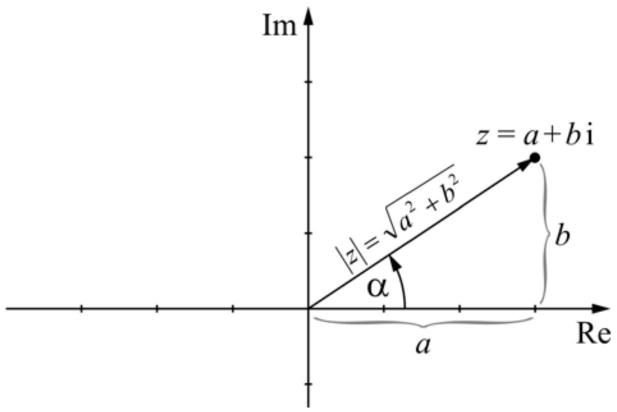
Definition: Ist $z = a + b\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl, so wird $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ als ihr *Betrag* bezeichnet.

Definition: Ist $z = a + b\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl, so wird $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ als die dazu *konjugiert komplexe Zahl* bezeichnet.

Inverses Element einer Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ bzgl. der Multiplikation: $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\,\mathrm{i} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Division in **C**: $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \dfrac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2$

Geometrische Interpretation der komplexen Zahlen – Gauß'sche Zahlenebene



Geometrische Interpretation der *Addition* komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene:

- „Pfeilparallelogramm“, identisch zur Addition von Vektoren im Zweidimensionalen.

Polardarstellung komplexer Zahlen

In der obigen Abbildung lässt sich erkennen (aufgrund der Definition der trigonometrischen Funktionen):

$$z = a + b\mathrm{i} = |z| \cdot \cos\alpha + \mathrm{i} \cdot |z| \cdot \sin\alpha = |z| \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha)$$

Multiplikation in der Polarform

Sind $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\alpha_1 + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha_1)$ und $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\alpha_2 + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha_2)$ komplexe Zahlen, so gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Die Herleitung dieser Gleichung erfolgt mithilfe der Definition der Addition komplexer Zahlen und der Additionstheoreme der Sinus- und der Kosinusfunktion:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta\,.$$

Multiplikativ Inverses in der Polarform

Ist $z = |z| \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha)$, so ist $z^{-1} = \frac{1}{|z|} \cdot (\cos(-\alpha) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\alpha))$

Division in der Polarform

Sind $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\alpha_1 + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha_1)$ und $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\alpha_2 + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha_2)$ komplexe Zahlen, so gilt:

$$z_1 : z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2)).$$