Komplexe Zahlen – Wiederholung/Überblick, Teil 2

Quadratwurzeln in $\mathbf{C}$

Ist $z = |z| \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha)$, so sind

$$z_1 = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \right) \text{ und } z_2 = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 180°\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 180°\right) \right)$$

Quadratwurzeln von z, d. h. es gilt $z_1^2 = z_2^2 = z$.

Potenzen: Moivre’sche Formel

Ist $z = |z| \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha)$ mit $0 \le \alpha < 360°$, so gilt $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\alpha) + \mathrm{i} \cdot \sin(n\alpha))$ f. bel. $n \in \mathbf{Z}$.

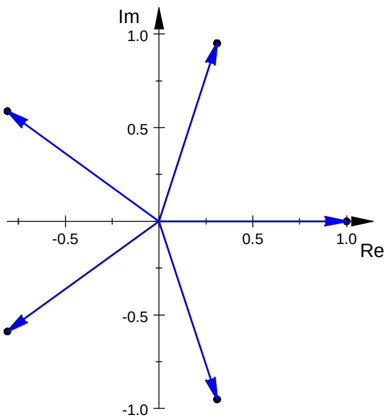
Kreisteilungsgleichung, *n*-te Einheitswurzeln

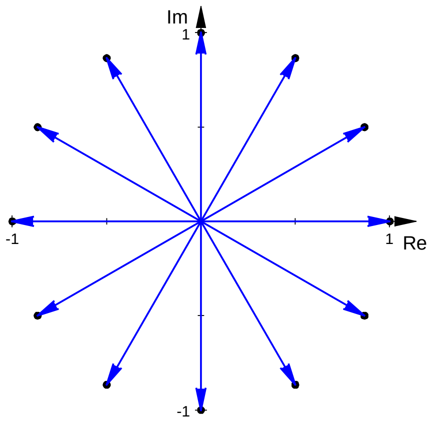
Die Gleichung $z^n = 1$ hat in $\mathbf{C}$ n Lösungen $z_0 \ldots z_{n-1}$:

$$z_j = \cos\frac{j \cdot 360°}{n} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{j \cdot 360°}{n} \quad (j = 1 \ldots n-1).$$

Diese Lösungen heißen *n-te Einheitswurzeln*; die Gleichung $z^n = 1$ *Kreisteilungsgleichung*.

Beispiele: $n = 5$ $n = 12$





Verallgemeinerung: Die Gleichung $z^n = q$ (mit $q \neq 0$) hat in $\mathbf{C}$ genau n verschiedene Lösungen.

Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz: Jede Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0 \quad \text{bzw.} \quad a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad \text{mit } n \ge 1,\ a_0 \ldots a_n \in \mathbf{C},\ a_n \neq 0$$

hat in $\mathbf{C}$ mindestens eine Lösung.

Folgerung: Jede Gleichung n-ten Grades hat – wenn mehrfache Lösungen mehrfach gezählt werden – in $\mathbf{C}$ genau n Lösungen.

Der Fundamentalsatz der Algebra wird in der Literatur in vielen verschiedenen Formulierungen angegeben. Zum Teil werden der o. a. Satz und die Folgerung etwa in der folgenden Form zusammengefasst als „Fundamentalsatz der Algebra“ bezeichnet:

Satz: Jede Gleichung der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$ (mit $n \ge 1$, $a_0 \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $a_n \neq 0$) hat im Körper $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen bei geeigneter Zählweise genau n Lösungen.

Eine andere Formulierung des Fundamentalsatzes zieht anstelle der Lösungen der o. a. Gleichung die Nullstellen des in ihr auftretenden Polynoms heran:

Satz: Es sei $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein nicht konstantes Polynom vom Grad n mit komplexen Koeffizienten $a_0 ... a_n$. Dann hat $P(z)$ genau n Nullstellen.