Komplexe Zahlen – Aufgaben

1. Ermittle die bezüglich der Multiplikation inversen komplexen Zahlen zu
   a) $3-\frac{1}{2}\mathrm{i}$
   b) $-3+7\mathrm{i}$.

2. Löse die folgenden Divisionsaufgaben in $\mathbb{C}$:
   a) (3+4i) : (2–5i)
   b) (1+i) : (1–i)

3. a) Zeige: Ist $z=a+b\mathrm{i}$ eine beliebige, von Null verschiedene komplexe Zahl und $z'=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$, so gilt $z\cdot z'=1+0\,\mathrm{i}$; z' ist also das multiplikativ Inverse zu z.
   b) Zeige: Das multiplikativ Inverse einer komplexen Zahl ist eindeutig bestimmt (erst dadurch ist die Verwendung des bestimmten Artikels in Aufgabenteil a) gerechtfertigt):
   Gilt $z\cdot z'=1+0\,\mathrm{i}$ und $z\cdot z''=1+0\,\mathrm{i}$ (für eine beliebige, von Null verschiedene komplexe Zahl z), so ist $z'=z''$.
   Hinweis: Nimm an, $z''=x+y\,\mathrm{i}$ wäre ein weiteres multiplikativ Inverses von $z=a+b\mathrm{i}$. Dann müsste gelten: $(a+b\,\mathrm{i})\cdot(x+y\,\mathrm{i})=1+0\mathrm{i}$. Schreibe diese Gleichung als Gleichungssystem und zeige, dass sich für x und y dieselben Lösungen ergeben wie oben für den Real- und Imaginärteil von z‘.

4. Löse folgende Gleichungen in $\mathbb{C}$ mithilfe quadratischer Ergänzung. Setze dann ihre Lösungen in die Ausgangsgleichungen ein, um sie zu überprüfen.
   a) $z^2+10z+34=0$
   b) $z^2-6z+12=0$
   c) $z^2+4\mathrm{i}\,z-13=0$

5. Wandele folgende komplexe Zahlen in die Polarform $z=|z|\cdot(\cos\varphi+\mathrm{i}\cdot\sin\varphi)$ um:
   a) $z = 1-\mathrm{i}$
   b) $z = -6+8\mathrm{i}$

6. Bilde das Produkt der Zahlen
   $z_1 = -6+8\mathrm{i}\approx 10\cdot(\cos 126{,}9°+\mathrm{i}\cdot\sin 126{,}9°)$ und
   $z_2 = 1-2\mathrm{i}\approx\sqrt{5}\cdot(\cos 296{,}6°+\mathrm{i}\cdot\sin 296{,}6°)$ in der Polarform.
   Vergleiche das Ergebnis mit dem in gewöhnlicher Form gebildeten Produkt der beiden Zahlen.

7. Berechne die Quadratwurzeln von $z = 2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}$.

8. Zeige, dass die Gleichung $z^n = q$ (mit $q\neq 0$) in $\mathbb{C}$ n verschiedene Lösungen hat und gib diese Lösungen an.
   Hinweis: Arbeite mit der Polarform und wende die Formel von Moivre an:
   $$(\cos\varphi+\mathrm{i}\cdot\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(n\varphi)$$