Mathematische Schülergesellschaft „Leonhard Euler“
Zirkel 11a (Schuljahr 2021/22)
Zirkelleiter: A. Filler

Wiederholung: Komplexe Zahlen

1. Berechne (d. h. wandle in die algebraische Form $a + b\mathrm{i}$ um):
   (a) $\frac{1}{3-\frac{1}{2}\mathrm{i}}$ (b) $\frac{3+4\mathrm{i}}{2-5\mathrm{i}}$ (c) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

2. Löse folgende Gleichungen in $\mathbb{C}$ mithilfe quadratischer Ergänzung.
   (a) $z^2 + 10z + 34 = 0$ (b) $z^2 - 6z + 12 = 0$

3. Wandle folgende komplexe Zahlen in die Polarform $z = |z| \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha)$ um.
   (a) $1 - \mathrm{i}$ (b) $-6 + 8\,\mathrm{i}$

4. Berechne die Quadratwurzeln von $z = 2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \mathrm{i}$.

Grenzwerte komplexer Zahlenfolgen

Grenzwerte komplexer Zahlenfolgen sind ebenso definiert wie Grenzwerte reeller Zahlenfolgen:

Sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen. Wir sagen, dass (z_n) gegen die Zahl $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|z - z_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Der Punkt z heißt Grenzwert der Folge (z_n).

Es bestehen folgende Zusammenhänge:

Es sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) (z_n) konvergiert gegen z.

b) Die Folge der Realteile $(Re(z_n))$ konvergiert gegen $Re(z)$ und die Folge der Imaginärteile $(Im(z_n))$ konvergiert gegen $Im(z)$.

c) Die Folge der konjugiert komplexen Zahlen $(\overline{z}_n)$ konvergiert gegen $\overline{z}$.

5. Weise nach:
   Ist (c_n) eine konvergente Zahlenfolge aus $\mathbb{C}$ mit $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, so gilt auch $|c| = \lim\limits_{n\to\infty} |c_n|$.

6. Untersuche, ob die Folge (c_n) mit $c_n = \frac{n}{n^2+1} + \sqrt[n]{2}\,\mathrm{i}$ konvergiert und bestimme ggf. ihren Grenzwert (mit Begründung).

7. Zeige, dass die Folge (c_n) mit $c_n = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n$ divergiert und gib alle Häufungspunkte dieser Folge an.