HU Berlin Sommersemester 2022

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 28.06.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 10 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ Diagonalform hat.

(b) Es sei die hermitesche Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & i \\ -i & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $S \in \mathrm{U}_2(\mathbb{C})$, so dass $S^{-1} \cdot B \cdot S$ Diagonalform hat.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ sei mit dem Skalarprodukt

$$\big\langle p(X), q(X) \big\rangle := \int_{-1}^{+1} p(X) q(X) \, \mathrm{d}X \qquad \big(p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1}\big)$$

versehen.

(a) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f \in \mathrm{L}\big(\mathbb{R}[X]_{\leq 1}\big)$, gegeben durch die Zuordnung

$$p(X) \mapsto p(1)(3X + 1),$$

bezüglich dieses Skalarprodukts selbstadjungiert ist.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ bezüglich der die Matrix von f Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Eine symmetrische Matrix $P \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ heißt *positiv definit*, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Bedingung $x^t \cdot P \cdot x > 0$ erfüllt ist.

(a) Beweisen Sie, dass eine symmetrische Matrix $P \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ genau dann positiv definit ist, wenn sie nur positive Eigenwerte hat.

(b) Zeigen Sie, dass

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$$

genau dann positiv definit ist, wenn $\alpha, \gamma > 0$ und $\alpha \cdot \gamma - \beta^2 > 0$ gilt. Formulieren Sie eine Verallgemeinerung dieses notwendigen und hinreichenden Kriteriums für positive Definitheit einer Matrix $P \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ (ohne Beweis).