Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 05.07.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 11 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Bahnen folgender Operationen $\bullet$ einer Gruppe G auf einer Menge M und entscheiden Sie, ob die Operationen transitiv sind.

(a) $G = \big((\mathbb{C}^\times)^2, \cdot\big)$ auf $M = \mathbb{C}^2$ mit $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\alpha_1 \cdot \xi_1\\ \alpha_2 \cdot \xi_2\end{pmatrix}$.

(b) $G = (G, \circ)$ auf $M = G$ mit $g \bullet g' := g \circ g'$.

(c) $G = \big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \cdot\big)$ auf $M = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $A \bullet B := A^{-1} \cdot B \cdot A$.

(d) $G = (S_3, \circ)$ auf $M = S_3$ mit $\sigma \bullet \tau := \sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Eine Gruppe $(G, \circ)$ operiere vermöge der Wirkung $\bullet$ auf der Menge M.

(a) Zeigen Sie, dass M disjunkte Vereinigung von G-Bahnen ist.

(b) Beweisen Sie, dass der Stabilisator G_m eines Elements $m \in M$ eine Untergruppe von G ist.

(c) Es seien $m, m' \in M$ Elemente, die in derselben G-Bahn liegen. Beweisen Sie, dass G_m zu $G_{m'}$ konjugiert ist, d. h. dass ein $g \in G$ mit

$$G_{m'} = g \circ G_m \circ g^{-1}$$

existiert.

(d) Für ein Element $m \in M$ setzen wir

$$G/G_m := \{g \circ G_m \,|\, g \in G\}.$$

Zeigen Sie, dass eine Bijektion zwischen der G-Bahn $G \bullet m$ und der Menge G/G_m besteht.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Mengen M_j $(j = 1, 2)$ einen geeigneten K-Vektorraum V_j und eine Gruppenwirkung $\bullet$, so dass M_j dadurch ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum V_j wird. Bestimmen Sie dessen Dimension. Begründen Sie Ihr Ergebnis!

(a) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q} \right\}.$

(b) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^3 \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \right\}.$

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Eine hermitesche Matrix $P \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$ heißt *positiv definit*, falls für alle $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ die Bedingung $\overline{x}^t \cdot P \cdot x > 0$ erfüllt ist.
Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ und $P \in \mathrm{Herm}_n(\mathbb{C})$, P positiv definit, existieren, so dass A als Produkt

$$A = U \cdot P$$

geschrieben werden kann. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass die hermitesche Matrix $\overline{A}^t \cdot A$ positiv definit ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix $S \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ und eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ existieren, so dass $\overline{A}^t \cdot A = S \cdot D^2 \cdot \overline{S}^t$ gilt.

(c) Setzen Sie $P := S \cdot D \cdot \overline{S}^t$ und zeigen Sie, dass P hermitesch und positiv definit ist.

(d) Bestimmen Sie schließlich U derart, dass $A = U \cdot P$ gilt, und zeigen Sie, dass $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ gilt.

Bemerkung: Dies ist eine Verallgemeinerung der Polarzerlegung komplexer Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in der Form $z = e^{i\varphi} \cdot r$ $(\varphi \in [0, 2\pi),\ r > 0)$.