Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 26.04.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 1 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte der drei folgenden reellen Matrizen und geben Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2$ bzw. in $\mathbb{R}^3$ an:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien K ein Körper und $A \in \mathrm{M}_n(K)$.

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ von A ein Polynom vom Grad n ist, d. h.

$$p_A(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in K$ und $a_n \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$a_n = (-1)^n, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A), \quad a_0 = \det(A)$$

gilt. Hierbei ist die *Spur* $\mathrm{tr}(A)$ *von* $A = (\alpha_{j,k})_{j,k=1,\ldots,n} \in \mathrm{M}_n(K)$ definiert als die Summe der Diagonaleinträge von A, d. h.

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,j}.$$

(c) Es sei nun $K = \mathbb{C}$. Weiter seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A. Beweisen Sie die beiden Gleichheiten

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \qquad \text{und} \qquad \det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Fibonacci-Folge $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ ist durch $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ durch die Rekursionsformel $\xi_{n+1} = \xi_n + \xi_{n-1}$ definiert. Wir betrachten nun die lineare Abbildung $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^2)$, die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben ist. Damit lässt sich obige Rekursionsformel in der Form

$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ \xi_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_n \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix}$$

schreiben.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A und bestimmen Sie dazugehörige Eigenvektoren $b_j \in \mathbb{R}^2$, d. h. Vektoren $b_j \in \mathbb{R}^2$ mit $f(b_j) = \lambda_j \cdot b_j$ für $j = 1, 2$.

(b) Die Menge $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ bestehend aus den Eigenvektoren b_1 und b_2 aus Aufgabenteil (a) bildet eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ derart, dass $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$ die Matrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (b) die Matrix A^n für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie damit die Werte ξ_{10} und ξ_{20}.