

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 03.05.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:

Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.

Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.

Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 2 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen das charakteristische Polynom und die Eigenwerte sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.

(a) $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$.

(b) $f_2: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $f_2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$.

(c) $f_3: \mathbb{R}[X]_{\leq 4} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ mit $f_3(g) = g'$; hierbei bedeutet g' die erste Ableitung des Polynoms g nach X .

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $A \in M_n(K)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $x \in K^n$ ein Eigenvektor von A , dann ist $\mu \cdot x$ ein Eigenvektor von A für alle $\mu \in K \setminus \{0\}$.

(b) Es gilt $\text{rg}(A) < n$ genau dann, wenn 0 ein Eigenwert von A ist.

(c) Ist λ Eigenwert von A , dann ist λ^k ein Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

(d) Ist A nilpotent, d. h. $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann ist jeder Eigenwert von A gleich 0 .

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ist $k_0 \in \mathbb{N}$ und besitzt A^{k_0} einen Eigenwert μ , der sich als k_0 -te Potenz in K darstellen lässt, d. h. $\mu = \lambda^{k_0}$ mit einem $\lambda \in K$, dann ist dieses λ ein Eigenwert von A .

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen A_j ($j = 1, 2$) diagonalisierbar sind. Bestimmen Sie im Falle der Diagonalisierbarkeit eine Matrix S_j derart, dass $S_j^{-1} \cdot A_j \cdot S_j$ Diagonalgestalt hat, und berechnen Sie zur Probe dieses Produkt.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_7).$$