HU Berlin Sommersemester 2022

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 10.05.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 3 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ von A gegeben ist durch

$$p_A(t) = -(t+1)(t-1)(t-\alpha).$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A diagonalisierbar?

(c) Sei $\alpha = 0$. Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ derart, dass die Matrix $S^{-1} \cdot A \cdot S$ diagonal ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $U, U_1, \ldots, U_n$ lineare Unterräume des endlich dimensionalen K-Vektorraums V. Dann heißt

$$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$$

direkte Summe von $U_1, \ldots, U_n$, falls

$$U = U_1 + \ldots + U_n \quad \text{und} \quad U_m \cap (U_1 + \ldots + U_{m-1}) = \{0\}$$

für alle $m \in \{2, \ldots, n\}$ gilt.

(a) Beweisen Sie, dass die drei folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$.

(ii) Es gilt $U = U_1 + \ldots + U_n$ und jeder Vektor $u \in U$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $u = u_1 + \ldots + u_n$ mit $u_j \in U_j$ für $j = 1, \ldots, n$.

(iii) Es gilt $U = U_1 + \ldots + U_n$ und $\dim_K(U) = \dim_K(U_1) + \ldots + \dim_K(U_n)$.

(b) Bestimmen Sie drei lineare Unterräume U_1, U_2 und U_3 des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$, für die $\mathbb{Q}^3 = U_1 + U_2 + U_3$ und $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$ gilt, aber $\mathbb{Q}^3 \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Die beiden komplexen Matrizen $A_1, A_2 \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ seien gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1-i & -2-2i & -1-i \\ -i & 0 & -1 \\ 1+i & 2+2i & 1+i \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie für jede dieser beiden Matrizen, ob sie diagonalisierbar ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Betrachten Sie nun die komplexe Matrix $A_3 \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})$, gegeben durch

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3/2 & 5 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ -1 & -5 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A_3 diagonalisierbar ist, und schreiben Sie den Vektorraum $\mathbb{C}^4$ als direkte Summe der zugehörigen Eigenräume.