HU Berlin Sommersemester 2022

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 17.05.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 4 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der beiden folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine reguläre $(n \times n)$-Matrix mit charakteristischem Polynom $p_A(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$. Stellen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1} als Linearkombination der Matrizen $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ dar.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

(b) Berechnen Sie die zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$$

inverse Matrix A^{-1} mit der in (a) entwickelten Methode.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{L}(V)$ mit $f^d = 0$, $f^{d-1} \neq 0$ für eine ganze Zahl $d > 0$.

(a) Wir betrachten die aufsteigende Kette linearer Unterräume

$$\{0\} = \mathrm{im}(f^d) \subseteq \mathrm{im}(f^{d-1}) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{im}(f^2) \subseteq \mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{im}(f^0) = \mathrm{im}(\mathrm{id}_V) = V.$$

Zeigen Sie, dass diese Kette echt aufsteigend ist, dass also $\mathrm{im}(f^j) \subsetneq \mathrm{im}(f^{j-1})$ für $j = 1, \ldots, d$ gilt.

(b) Bestimmen Sie nun eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V derart, dass die Matrix A von f bezüglich $\mathcal{B}$ strikte obere Dreiecksform hat, dass also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor: Wählen Sie eine Basis von $\mathrm{im}(f^{d-1})$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathrm{im}(f^{d-2})$ usw., bis Sie eine Basis von V erhalten. Ordnen Sie diese geeignet. Begründen Sie, warum A nun die gewünschte Form hat.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine quadratische Matrix.

(a) Die Matrix A besitze n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Zeigen Sie, dass dann das Minimalpolynom m_A von A durch

$$m_A(t) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$$

gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $p_A(0) \neq 0$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $m_A(0) \neq 0$ gilt.