HU Berlin Sommersemester 2022

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 24.05.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 5 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_{A_j}(t)$ und das Minimalpolynom $m_{A_j}(t)$ von A_j $(j = 1, 2)$.

(b) Berechnen Sie die Eigenräume und die Haupträume von A_j $(j = 1, 2)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Die Matrix $B \in \mathrm{M}_{m+n}(K)$ sei von der Form

$$B = \begin{pmatrix} B' & C \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$$

mit $B' \in \mathrm{M}_m(K)$, $B'' \in \mathrm{M}_n(K)$, $C \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $0 \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ (Nullmatrix).

(a) Beweisen Sie die Aussage

$$\det(B) = \det(B') \cdot \det(B'').$$

(b) Zeigen Sie für die charakteristischen Polynome von B, B' und B'' die Beziehung

$$p_B(t) = p_{B'}(t) \cdot p_{B''}(t).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien folgende Matrizen bzw. lineare Abbildungen gegeben:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{Q}), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_5), \text{ sowie}$$

$$f_3 \colon \mathbb{R}[X]_{\leq 4} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 4}, \text{ gegeben durch } f_3(g) = g''.$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $S_1 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ derart, dass sich die Matrix $A_1' = S_1^{-1} \cdot A_1 \cdot S_1$ als Summe einer Diagonalmatrix und einer nilpotenten Matrix schreiben lässt.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $S_2 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_5)$ derart, dass sich die Matrix $A_2' = S_2^{-1} \cdot A_2 \cdot S_2$ als Summe einer Diagonalmatrix und einer nilpotenten Matrix schreiben lässt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ derart, dass sich die Matrix A_3' von f_3 bezüglich $\mathcal{B}$ als Summe einer Diagonalmatrix und einer nilpotenten Matrix schreiben lässt.