HU Berlin Sommersemester 2022

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 31.05.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 6 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die beiden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & 2 & -6 \\ -4 & 8 & 3 & -4 \\ -8 & 16 & 4 & -9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$$

reguläre Matrizen $S_1 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $S_2 \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ derart, dass die Matrizen

$$A'_j := S_j^{-1} A_j S_j \qquad (j = 1, 2)$$

Jordansche Normalform haben.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom p_A über K in Linearfaktoren $p_A(t) = \pm(t - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r)^{\alpha_r}$ zerfalle.

(a) Zeigen Sie: Ist $n \in \{1, 2, 3\}$, so bestimmen charakteristisches Polynom und Minimalpolynom die Jordansche Normalform von A eindeutig bis auf Permutation der Jordanblöcke.

(b) Geben Sie für $n = 4$ ein Gegenbeispiel zur Aussage aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Welche der folgenden Abbildungen $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle\colon V \times V \longrightarrow K$ definieren ein Skalarprodukt auf V? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Für $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in V$ sei

$$\langle x, y \rangle := \eta_1(3\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) + \eta_2(-2\xi_1 + 2\xi_2) + \eta_3(\xi_1 + 5\xi_3).$$

(b) Für $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in V$ sei

$$\langle x, y \rangle := (\xi_1 + \eta_1)^2 + (\xi_2 + \eta_2)^2.$$

(c) Für $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^n$ und $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \in V$ sei

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot \eta_j \,.$$

(d) Für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ und $f, g \in V$ sei

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t \,.$$