HU Berlin Sommersemester 2022

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 14.06.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 8 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $v \in V \setminus \{0\}$. Die lineare Abbildung $P_v\colon V \longrightarrow V$ sei dann gegeben durch

$$P_v(x) := x - \frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v \qquad (x \in V).$$

(a) Verifizieren Sie, dass P_v eine Projektion ist, d. h. dass $P_v^2 = P_v$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\ker(P_v)$ und zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(P_v)$ das *orthogonale Komplement von* $\ker(P_v)$ ist, d. h. dass $V = \ker(P_v) \oplus \operatorname{im}(P_v)$ gilt und jeder Vektor von $\operatorname{im}(P_v)$ auf jedem Vektor von $\ker(P_v)$ senkrecht steht.

(c) Es seien speziell $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ der unitäre Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und $v = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie Orthogonalbasen von $\ker(P_v)$ und $\operatorname{im}(P_v)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 mit reellen Koeffizienten betrachten wir das Skalarprodukt

$$\big\langle p(X), q(X)\big\rangle := \int_{-1}^{+1} p(X)q(X)\,\mathrm{d}X \qquad \big(p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3}\big).$$

(a) Bestimmen Sie zu diesem Skalarprodukt die Gramsche Matrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.

(b) Berechnen Sie bezüglich dieses Skalarprodukts die Winkel zwischen den Polynomen 1 und $1 + X$, zwischen X und X^2, sowie zwischen X^2 und X^3.

(c) Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis $\mathcal{B}$ aus Teilaufgabe (a) an, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ bezüglich des obigen Skalarprodukts zu konstruieren.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Wir betrachten die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

und setzen damit $\langle x, y \rangle := x^t \cdot A \cdot y$, wobei $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind. Zeigen Sie, dass damit ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens ausgehend von der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis für das Skalarprodukt aus Aufgabenteil (a) im Fall $n = 2$ und $n = 3$.