Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 21.06.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 9 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit der durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $(x \in V)$ gegebenen Norm. Zeigen Sie:

(a) Ist V n-dimensional und $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine geordnete Orthogonalbasis von V, so gilt für $x \in V \setminus \{0\}$ die Beziehung $\cos^2(\alpha_1) + \ldots + \cos^2(\alpha_n) = 1$, wobei α_j den Winkel zwischen x und b_j $(j = 1, \dots, n)$ bezeichnet.

(b) Wann gilt in der Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad (x, y \in V)$$

die Gleichheit? Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an und beweisen Sie diese.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ eine unitäre Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von U den Betrag 1 haben.

(b) Es sei $\mathbb{C}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Für einen linearen Unterraum $W \subseteq \mathbb{C}^n$ ist das orthogonale Komplement durch

$$W^\perp := \big\{ v \in \mathbb{C}^n \,\big|\, \langle v, w\rangle = 0,\ \forall w \in W \big\}$$

definiert.
Zeigen Sie: Ist W ein U-invarianter Unterraum, so ist $W^\perp$ ebenfalls U-invariant.

(c) Beweisen Sie, dass U diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der orthogonalen (2×2)-Matrizen.

(a) Es sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ liegt und dass umgekehrt jede Matrix $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft $\det(A) = 1$ diese Form hat. Interpretieren Sie die durch D_α induzierte lineare Selbstabbildung des $\mathbb{R}^2$ geometrisch.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ liegt und beschreiben Sie die geometrische Wirkung der durch S induzierten linearen Selbstabbildung des $\mathbb{R}^2$.

(c) Zeigen Sie, dass alle Matrizen in $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ von der Form D_α oder $D_\alpha \cdot S$ sind.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es seien $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine geordnete Orthonormalbasis von V. Eine orthogonale Abbildung $f \in \mathrm{O}(V)$ heißt *Drehung*, wenn für die Matrix D von f bezüglich $\mathcal{B}$ die Gleichheit $\det(D) = 1$ gilt.

(a) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Zeigen Sie, dass jede Drehung $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$ eine *Drehachse* besitzt, es also einen 1-dimensionalen linearen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $f(u) = u$ für alle $u \in U$ gilt.

(b) Es seien $f_j \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(j = 1, 3)$ Drehungen um die ξ_1-Achse bzw. die ξ_3-Achse des $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$f_1 \colon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad f_3 \colon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrizen von f_1 und f_3 bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Drehachse sowie den Drehwinkel (im Bogenmaß) der Drehung $f_1 \circ f_3$.