HU Berlin Wintersemester 2021/22

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 02.11.2021 bis 09:00 Uhr auf Moodle

JEDE Aufgabe in separater PDF abgeben.
Erste Seite in JEDER PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 1 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien X und Y zwei Mengen. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt *injektiv*, wenn für zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, dass $x_1 = x_2$ gilt. Die Abbildung heißt *surjektiv*, wenn für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert. Eine Abbildung, die sowohl surjektiv als auch injektiv ist, heißt *bijektiv*.

(a) Geben Sie eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort. Hierbei bezeichne $2\mathbb{N}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen.

(b) Geben Sie eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$. Hierbei bezeichne $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ den Einheitskreis an.

(d) Geben Sie eine injektive Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ an.

(e) Geben Sie eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{R}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ der ersten n natürlichen Zahlen. Auf der Menge $\mathcal{R}_n$ können wir wie folgt zwei Verknüpfungen einführen:
Dazu bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Rest einer natürlichen Zahl c nach Division durch n mit $R_n(c)$; es gilt $R_n(c) \in \mathcal{R}_n$. Für zwei Zahlen $a, b \in \mathcal{R}_n$ setzen wir jetzt:

$$\begin{aligned} \oplus\colon \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n &\longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \oplus b := R_n(a + b); \\ \odot\colon \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_n &\longrightarrow \mathcal{R}_n, \quad \text{gegeben durch } (a, b) \mapsto a \odot b := R_n(a \cdot b). \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Für alle $a, b \in \mathcal{R}_n$ gilt $a \oplus b = b \oplus a$.

(ii) Zu jedem $a \in \mathcal{R}_n$ existiert ein $b \in \mathcal{R}_n$, sodass $a \oplus b = 0$ gilt.

(iii) Für alle $a \in \mathcal{R}_n$ gilt die Aussage $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$.

(b) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\odot$ assoziativ ist.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, zunächst zu zeigen, dass $R_n(a \cdot R_n(b)) = R_n(a \cdot b)$ für alle natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Für welche $a \in \mathcal{R}_9$ gibt es ein $b \in \mathcal{R}_9$, so dass $a \odot b = 1$ gilt? Begründen Sie.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Finden Sie alle Lösungen $x, y, z \in \mathbb{R}$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1, \\ 4x + 5y + 6z &= -2, \\ 7x + 8y + 9z &= -5. \end{aligned}$$

Für eine natürliche Zahl $n > 0$ sei die Menge $\mathcal{R}_n$ mit den Verknüpfungen „$\oplus$" und „$\odot$" wie in Aufgabe 2 gegeben.

(b) Finden Sie alle Lösungen $x, y \in \mathcal{R}_9$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (4 \odot x) \oplus (2 \odot y) &= 6, \\ (5 \odot x) \oplus (4 \odot y) &= 8. \end{aligned}$$

(c) Finden Sie alle Lösungen $x, y \in \mathcal{R}_{12}$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (7 \odot x) \oplus (4 \odot y) &= 3, \\ (5 \odot x) \oplus (2 \odot y) &= 9. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (0 Punkte)

Lernen Sie das griechische Alphabet, bzw. rufen Sie sich dieses wieder in Erinnerung!

Buchstabe	Name	Buchstabe	Name
α A	Alpha	ν N	Ny
β B	Beta	ξ Ξ	Xi
γ Γ	Gamma	o O	Omikron
δ Δ	Delta	π Π	Pi
ε E	Epsilon	ϱ P	Rho
ζ Z	Zeta	σ Σ	Sigma
η H	Eta	τ T	Tau
ϑ Θ	Theta	υ Υ	Ypsilon
ι I	Iota	φ Φ	Phi
κ K	Kappa	χ X	Chi
λ Λ	Lambda	ψ Ψ	Psi
μ M	My	ω Ω	Omega

Kennen Sie die folgenden Mathematiker:

Θαλῆς, Πυθαγόρας, Πλάτων, Ἀριστοτέλης, Εὐκλείδης, Ἀρχιμήδης, Διόφαντος?

Hinweis: Am Wortende wird der Buchstabe σ durch den Buchstaben ς ersetzt.