HU Berlin Wintersemester 2021/22

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 25.01.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

JEDE Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in JEDEM PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 11 (30 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es sei K ein Körper und $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$ eine quadratische Matrix, wobei $a_1, \ldots, a_n$ für die Zeilen von A stehen. Bestimmen Sie für $j, j' = 1, \ldots, n$ mit $j \neq j'$ und $\lambda \in K$ Matrizen $Z_j^{j'}, Z_j(\lambda), Z_{j+j'} \in \mathrm{M}_n(K)$, die folgende Gleichungen erfüllen:

$$Z_j^{j'} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_{j'} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j'} \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad Z_j(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad Z_{j+j'} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_{j'} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_{j'} + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Wie wirkt sich die Rechtsmultiplikation $A \cdot Z_j^{j'}, A \cdot Z_j(\lambda), A \cdot Z_{j+j'}$ der Matrizen $Z_j^{j'}, Z_j(\lambda), Z_{j+j'}$ mit der Matrix A jeweils auf die Spalten von A aus?

(b) Zeigen Sie, dass jede Matrix A der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ als endliches Produkt der Matrizen $Z_j^{j'}, Z_j(\lambda), Z_{j+j'}$ ($j, j' = 1, \ldots, n$ mit $j \neq j'$ und $\lambda \in K$) aus Aufgabenteil (a) darstellbar ist.

Bemerkung: Die Matrizen $Z_j^{j'}, Z_j(\lambda), Z_{j+j'}$ werden *Elementarmatrizen* genannt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es sei E_3 die (3×3)-Einheitsmatrix. Bestimmen Sie algorithmisch die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

inverse Matrix A^{-1}, indem Sie die (3×6)-Matrix $(A \,|\, E_3)$ mithilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Gestalt $(E_3 \,|\, A^{-1})$ überführen.

(b) Stellen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und die zu A inverse Matrix A^{-1} jeweils als Produkt von Matrizen $Z_j^{j'}, Z_j(\lambda), Z_{j+j'}$ mit $j, j' = 1, 2, 3$, wobei $j \neq j'$, und $\lambda \in K$ dar. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}$ sowie der geordneten Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Weiterhin betrachten wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathcal{C}$ sowie der geordneten Basis

$$\mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrizen für den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ und von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$.

(b) Bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix für den Basiswechsel von $\mathcal{C}'$ nach $\mathcal{C}$.

(c) Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie mittels der Basistransformationsformel die Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$.

Aufgabe 4* (10 Zusatzpunkte)

Es seien K ein Körper, $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine $(m \times n)$-Matrix und $B \in \mathrm{M}_n(K)$ eine $(n \times n)$-Matrix. Weiter bezeichne E_m die $(m \times m)$-Einheitsmatrix.

(a) Es sei $B \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass der Rang von $A \cdot B$ gleich dem Rang von A ist.

(b) Es sei nun B nicht notwendigerweise regulär. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\mathrm{rg}(A)$ und $\mathrm{rg}(B)$ den maximal bzw. minimal möglichen Rang von $A \cdot B$.

(c) Unter welcher Bedingung gibt es eine zu A rechtsinverse Matrix, d.h. eine Matrix $C \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ mit der Eigenschaft $A \cdot C = E_m$? Begründen Sie Ihre Aussage.

(d) Berechnen Sie zwei zu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ rechtsinverse Matrizen C und C'.