HU Berlin Wintersemester 2021/22

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 15.02.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

JEDE Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in JEDEM PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 14 (30 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Determinante der reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Leibnizschen Definition oder elementarer Umformungen.

(b) Berechnen Sie die Determinante der komplexen Matrizen

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & (2i+2) \\ 2i & (2i+1) & i \\ i & (i+1) & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & -1 & 3\lambda \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 2\lambda & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Parameter sei.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ zwei quadratische Matrizen und $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix.

(a) Beweisen Sie den Multiplikationssatz für Determinanten, d.h. zeigen Sie, dass

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

gilt.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle „A regulär“ und „A singulär“ und nutzen Sie, dass eine reguläre Matrix als Produkt von Elementarmatrizen (siehe Serie 10, Aufgabe 1) darstellbar ist.

(b) Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A), \quad \det(C^{-1}) = \frac{1}{\det(C)}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Cramersche Regel auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \xi_1 & + & \xi_2 & + & \xi_3 & + & \xi_4 & = & 3 \\ \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & 2\xi_3 & + & 2\xi_4 & = & 5 \\ \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & 3\xi_3 & + & 3\xi_4 & = & 9 \\ \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & 3\xi_3 & + & 4\xi_4 & = & 13 \end{array}$$

anwendbar ist und berechnen Sie mit Hilfe dieser dessen Lösung $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^t \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 4* (10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar sind und berechnen Sie die inversen Matrizen A^{-1} und B^{-1} mit Hilfe der Minoren der Einträge der Matrizen A und B.