HU Berlin Wintersemester 2021/22

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 07.12.2021 bis 09:00 Uhr auf Moodle

JEDE Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in JEDEM PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 6 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + 3\,\xi_2 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie Basen der Unterräume U_1, U_2 sowie $U_1 \cap U_2$ und geben Sie die Dimensionen dieser Unterräume an.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes die Dimension des Unterraums $U_1 + U_2$.

(b) Im $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3 \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie Basen der Unterräume U_1, U_2 sowie $U_1 + U_2$ und geben Sie die Dimensionen dieser Unterräume an.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes die Dimension des Unterraums $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien U_1 und U_2 zwei Unterräume des K-Vektorraums V. Dann heißt $V = U_1 \oplus U_2$ *direkte Summe von* U_1 *und* U_2, falls $V = U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt.

(a) Es sei U_1 ein Unterraum des endlich dimensionalen K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass es dann einen *zu* U_1 *komplementären Unterraum* U_2 gibt, d.h. einen Unterraum U_2 mit der Eigenschaft $V = U_1 \oplus U_2$.

(b) Im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^4$ betrachten wir den Unterraum

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie zwei zu U_1 komplementäre Unterräume U_2 und U_2' im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^4$, für die $U_2 \neq U_2'$ gilt.
Überprüfen Sie die Gültigkeit des Dimensionssatzes für die beiden Unterräume U_1 und U_2.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 2$ mit Unterräumen $U_1, U_2 \subseteq V$.

  (i) Es gelte $\dim_K(U_1) = \dim_K(U_2) = n - 1$. Zeigen Sie, dass $\dim_K(U_1 \cap U_2) \geq n - 2$ folgt.

  (ii) Es gelte $\dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) > n$. Zeigen Sie, dass dann $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ folgt.

(b) Es sei V ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension n.

  (i) Zeigen Sie, dass V genau p^n Elemente hat.

  (ii) Bestimmen Sie für $V = \mathbb{F}_2^3$ die Anzahl der Unterräume der Dimension 2.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Koordinaten des Vektors v bezüglich der gegebenen geordneten Basis $\mathcal{B}$ des K-Vektorraums V:

(a) $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^3 : v = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$;

(b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3} : v = X^2$, $\mathcal{B} = \{X^3 + X^2 + X + 1, X^2 - X, X^3 + 1, X^3 + X^2\}$;

(c) $K = \mathbb{F}_3$, $V = \mathbb{F}_3^3 : v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$;

(d) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2 : v = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -i \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.