HU Berlin Sommersemester 2018

Probeklausur zur Vorlesung
Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Die Lösungen zur Probeklausur werden in den Übungen besprochen.

Probeklausur

Aufgabe 1 (15 Punkte)

(a) Definieren Sie die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$ mit Hilfe der Peano-Axiome.

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion das Distributivgesetz

$$(m+n)\cdot p = m\cdot p + n\cdot p$$

für alle $m, n, p \in \mathbb{N}$ (dabei darf das Assoziativ- und Kommutativgesetz der Addition vorausgesetzt werden).

(c) Zeigen Sie: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m + n = 0$. Dann folgt $m = n = 0$ (dabei darf das Kommutativgesetz der Addition vorausgesetzt werden).

Aufgabe 2 (15 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie für den Bereich der natürlichen Zahlen.

(b) Beweisen Sie ohne Verwendung des Fundamentalsatzes der elementaren Zahlentheorie, dass jede natürliche Zahl $a > 1$ mindestens einen Primteiler $p \in \mathbb{P}$ besitzt.

(c) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung der Zahl $5^6 - 3^6$.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Homomorphiesatz für Gruppen.

(b) Ist $f\colon (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, gegeben durch die Zuordnung $m \mapsto (-1)^m$ $(m \in \mathbb{Z})$, ein Gruppenhomomorphismus? Begründen Sie.

(c) Zeigen Sie, dass zyklische Gruppen kommutativ sind.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $d := (247, 91)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus'.

(b) Betrachten Sie den Ring $(\mathcal{R}_{247}, \oplus, \odot)$ und bestimmen Sie explizit ein $x \in \mathcal{R}_{247}$, das der Gleichung $91 \odot x = 52$ genügt.

(c) Es seien $a \in \mathbb{N}$, $a > 0$, und $p \in \mathbb{P}$ eine ungerade Primzahl. Beweisen Sie, dass $2p$ ein Teiler von $a^p - a$ ist.

Aufgabe 5 (15 Punkte)

(a) Definieren Sie die Begriffe „Einheit“ und „Nullteiler“ eines kommutativen Rings $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1.

(b) Zeigen Sie, dass die Einheiten eines kommutativen Rings $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1 bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

(c) Bestimmen Sie die Gruppe der Einheiten für die Ringe $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$ für $n = 5$ und $n = 8$. Sind diese Gruppen zueinander isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) Rekapitulieren Sie, ohne Beweise, die Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit Hilfe rationaler Cauchyfolgen. Definieren Sie anhand dieser Konstruktion die Addition und Multiplikation zweier reelller Zahlen (ohne die Wohldefiniertheit zu thematisieren).

(b) Bestimmen Sie die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{26}{7} \in \mathbb{Q}$.

(c) Beweisen Sie, dass es für zwei beliebige rationale Zahlen a, b mit $a < b$ eine irrationale Zahl γ mit $a < \gamma < b$ gibt.