HU Berlin Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 31.10.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 1 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei S_n ($n \in \mathbb{N}$) die symmetrische Gruppe. Die Abbildung

$$\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$$

ist durch die Zuordung $\pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)$ gegeben.

(a) Stellen Sie die Permutationen $\pi_1, \pi_2 \in S_6$, welche durch die Zuordnungsvorschriften

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, als Produkt von Transpositionen dar. Geben Sie zudem die Zuordnungsvorschrift für die folgenden Permutationen an:

$$\pi_3 := \pi_1 \circ \pi_2, \quad \pi_4 := \pi_2 \circ \pi_1, \quad \pi_5 := \pi_1^{-1}, \quad \pi_6 := \pi_2^{-1}.$$

Bestimmen Sie weiter das Signum $\mathrm{sgn}(\pi_j)$ für $j = 1, \ldots, 6$.

(b) Beweisen Sie, dass die Abbildung sgn ein Gruppenhomomorphismus ist, d.h. dass die Gleichheit

$$\mathrm{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \mathrm{sgn}(\pi_1) \cdot \mathrm{sgn}(\pi_2) \quad (\pi_1, \pi_2 \in S_n)$$

besteht. Folgern Sie daraus, dass für $\pi \in S_n$ die Gleichheit $\mathrm{sgn}(\pi^{-1}) = \mathrm{sgn}(\pi)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die *alternierende Gruppe* A_n, gegeben durch

$$A_n := \{\pi \in S_n \,|\, \mathrm{sgn}(\pi) = 1\},$$

ein Normalteiler in S_n ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir betrachten die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

$$G := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, d \in \mathbb{Z}, \det(M) = \pm 1 \right\}$$

sowie die Teilmenge

$$N := \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass G bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in G ist.

(c) Bestimmen Sie die Faktorgruppe G/N und geben Sie einen Isomorphismus von G/N zu einer Gruppe der Form $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie:

(a) Das Zentrum $Z(G)$ von G ist ein Normalteiler von G.

(b) Der Normalisator $N_G(H)$ von H in G ist eine Untergruppe von G.

(c) Die Untergruppe H ist ein Normalteiler in $N_G(H)$.

(d) Ist $H' \subseteq G$ eine weitere Untergruppe, so dass $H \subseteq H'$ Normalteiler in H' ist, so gilt $H' \subseteq N_G(H)$.