HU Berlin Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 16.01.2017 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 10 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $f(X) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{Q}[X]$ ein normiertes kubisches Polynom und $\Delta = \prod_{j<k}(\alpha_j - \alpha_k)^2$ die *Diskriminante von* $f(X)$, wobei die α_j $(j = 1, 2, 3)$ die drei Nullstellen von $f(X)$ in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ bezeichnen. Zeigen Sie:

(a) Nach einer Substitution der Form $X = Y + a$ (mit geeignetem $a \in \mathbb{Q}$) dürfen wir annehmen, dass a_2 verschwindet. Zeigen Sie, dass Δ unter dieser Substitution invariant bleibt.

(b) Im Fall $a_2 = 0$ gilt $\Delta = -(4a_1^3 + 27a_0^2)$.

(c) Ist f zusätzlich irreduzibel und $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{Q}$, dann gilt $\mathbb{Q}(\alpha_1, \sqrt{\Delta}) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\mathbb{Q}(\alpha_1, \sqrt{\Delta}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und bestimmen Sie dann $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \sqrt{\Delta}) : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien K ein Körper der Charakteristik 0 sowie $X_1, \ldots, X_n$ Unbestimmte und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die elementarsymmetrischen Polynome in $X_1, \ldots, X_n$ (siehe Serie 7).

(a) Beweisen Sie, dass der Körper $E := K(X_1, \ldots, X_n)$ eine Galois-Erweiterung des Körpers $L := K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ist, deren Galois-Gruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n ist.

(b) Wir betrachten nun das Polynom

$$f(T) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} \pm \ldots + (-1)^n \sigma_n = (T - X_1) \cdot \ldots \cdot (T - X_n) \in L[T]$$

mit Diskriminante $\Delta = \prod_{j<k}(X_j - X_k)^2$.
Welcher Untergruppe von S_n entspricht die Körpererweiterung $L(\sqrt{\Delta})/L$ nach dem Hauptsatz der Galois-Theorie?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten den Zerfällungskörper E des Polynoms $f(X) = X^4 - 3$ über $\mathbb{Q}$.

(a) Bestimmen Sie die Galois-Gruppe G der Erweiterung E über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G und Zwischenkörper der Erweiterung E über $\mathbb{Q}$ und erstellen Sie jeweils ein Diagramm, das alle Inklusionsrelationen der auftretenden Untergruppen bzw. Zwischenkörper wiedergibt.

(c) Welche der Zwischenkörper sind normal über $\mathbb{Q}$?