HU Berlin Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 23.01.2017 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 11 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $[0, 1]$ das Einheitsintervall. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [0, 1] \longrightarrow D$ wird als *glatter Weg* bezeichnet. Weiter sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion. Dann ist das *Wegintegral von f entlang* γ definiert durch

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t := \int_0^1 \mathrm{Re}\,(f(\gamma(t))\gamma'(t))\,\mathrm{d}t + i\int_0^1 \mathrm{Im}\,(f(\gamma(t))\gamma'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Berechnen Sie folgende Wegintegrale:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := (t + i)/(t - i)$,

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$,

(c) $\displaystyle\int_\gamma |z|^2\,\mathrm{d}z$ für $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) := r(\cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t))$ $(r \in \mathbb{R}_{>0})$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, in welchen Punkten $z_0 \in \mathbb{C}$ die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind und geben Sie gegebenenfalls die komplexe Ableitung an.

(a) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^2$.

(b) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = |z|^2$.

(c) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \mathrm{Re}(z) + i|\mathrm{Im}(z)|$.

(d) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \sin(z)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Das Produkt $f \cdot g$ ist holomorph auf D und besitzt dort die komplexe Ableitung $f' \cdot g + f \cdot g'$.

(b) Der Quotient $1/f$ ist holomorph auf $D' := \{z \in D \mid f(z) \neq 0\}$ und besitzt dort die komplexe Ableitung $-f'/f^2$.