HU Berlin Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 30.01.2017 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 12 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

(a) Gilt $f(D) \subseteq \mathbb{R}$, so ist f konstant.

(b) Sind der Realteil $u := \mathrm{Re}(f)$ und der Imaginärteil $v := \mathrm{Im}(f)$ von f zweimal stetig partiell differenzierbar nach x und y, so sind u und v harmonische Funktionen auf D, d. h. es gilt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v(x,y) = 0 \quad (z = x + iy \in D).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a, b, c \in D$. Weiter bezeichne $W_{a,b}$ die Menge aller Wege in D mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Beweisen Sie:

(a) Homotopie „$\sim$“ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge $W_{a,b}$.

(b) Gilt $\gamma \sim \delta$ in $W_{a,b}$, so ist auch $\gamma^{-1} \sim \delta^{-1}$ in $W_{b,a}$.

(c) Aus $\gamma_1 \sim \delta_1$ in $W_{a,b}$ und $\gamma_2 \sim \delta_2$ in $W_{b,c}$ folgt $\gamma_1\gamma_2 \sim \delta_1\delta_2$ in $W_{a,c}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein rektifizierbarer Weg und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexwertige Funktion.
Beweisen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ einen Polygonzug $\mathcal{P}$ in D mit Anfangspunkt $\gamma(0)$ und Endpunkt $\gamma(1)$ mit den drei folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $\mathcal{P}$ hat alle seine Eckpunkte auf γ,

(ii) $\mathrm{dist}(z, \gamma) < \delta$ für alle $z \in \mathcal{P}$,

(iii) $\left| \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_{\mathcal{P}} f(z)\mathrm{d}z \right| < \varepsilon.$