Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 06.02.2017 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 13 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden komplexen Wegintegrale mit Hilfe der (verallgemeinerten) Cauchy'schen Integralformel:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{\exp(z)}{z}+1\right)\mathrm{d}z$ für $\gamma(t) := \exp(2\pi i t)$ $(t \in [0,1])$,

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z^2+1}\mathrm{d}z$ für $\gamma(t) := 3\exp(2\pi i t)$ $(t \in [0,1])$,

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(\exp(z))}{(z-i)^3}\mathrm{d}z$ für $\gamma(t) := i + \exp(2\pi i t)$ $(t \in [0,1])$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $\alpha > 0$ eine positive reelle Zahl. Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes die Gleichheit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(x+i\alpha)^2/2\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2/2\right)\mathrm{d}x.$$

Folgern Sie daraus

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-x^2/2\right)\cos(\alpha x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\exp(-\alpha^2/2).$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2/2\right)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $U_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : U_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq |z|$ $(z \in U_1(0))$. Weiter gelte $f(0) = 0$ und $f(z_0) = z_0$ für ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $f(z) = z$ für alle $z \in U_1(0)$ gilt.